Funkce

Obsah

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4. Funkce

4.1. Základní vlastnosti funkcí

1. Zapište funkci na množině R, která každému $x \in R$ přiřazuje jeho polovinu.

Řešení: $f : y = \dfrac{x}{2}$

2. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost uražené dráhy na čase při rovnoměrném pohybu tělesa. Těleso urazí za 10 sekund 250 metrů.

Řešení:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{250}{10}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$s = 25\,t,\ \ t \in \langle 0, \infty)$$

3. Určitou práci má vykonat 5 dělníků. Pracují-li 3, vykonají práci za 7 dní. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost počtu *y* dní, za něž práci vykonají, na počtu *x* pracujících dělníků.

Řešení: 1dělník vykoná práci za x dní. Pracují-li 3 dělníci, platí: $3 \cdot \dfrac{7}{x} = 1 \Rightarrow x = 21$. Jeden dělník vykoná práci za 21 dní, pak $y = \dfrac{21}{x}$, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4. Za pronájem sálu na maturitní ples si pronajímatel účtuje 10.500 Kč za jednu hodinu. Určete funkční předpis, který vyjadřuje závislost ceny vstupného na počtu účastníků plesu v případě, že ples trvá 8 hodin.

Řešení: Pronájem za 8 hodin je 84.000 Kč, pak $y = \dfrac{84000}{x}$, $x \in N$

5. Zjistěte, zda předpis $y = x + 1$, pomocí něhož je každému $x \in R$ přiřazeno $y \in R$ je funkcí na množině *R*.

Řešení: Ano, jedná se o funkci.

6. Zjistěte, zda předpis $y^2 = 4 - x^2$, je funkcí.

Řešení: Ne, nejedná se o funkci. Jedné hodnotě *x*, např. $x = 0$ jsou přiřazeny 2 hodnoty $y_1 = 2,\ y_2 = -2$.

7. Zjistěte, zda předpis $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, je funkcí.

Řešení: Ano, jedná se o funkci.

8. V tabulce jsou číslu *x* přiřazeny hodnoty *y*. Určete, zda se jedná o funkci.

x	-3	0	-1	-3	1	-5
y	-6	0	3	2	5	7

Řešení: Nejedná se o funkci. Číslu -3 jsou přiřazeny hodnoty dvě -6 a 2.

9. V tabulce jsou číslu *x* přiřazeny hodnoty *y*. Určete, zda se jedná o funkci.

x	-6	0	2	8	0	-1
y	-6	3	-6	1	3	7

Řešení: Jedná se o funkci. Číslu 0 je přiřazena jedna hodnota 3.

10. Určete definiční obor funkce, která je dána tabulkou:

x	-10	0	2	-5	3	-1
y	-6	3	-6	1	3	7

Řešení: $D(f)=\{-10,-5,-1,0,2,3\}$

11. Určete definiční obor funkce:

a) $f: y=\dfrac{3-x}{5}$

b) $f: y=\dfrac{2}{x-3}$

c) $f: y=\dfrac{5x}{x+7}$

d) $f: y=\dfrac{x-2}{x^2+1}$

e) $f: y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

f) $f: y=\dfrac{12}{|x-3|}$

g) $f: y=|x|-10x$

h) $f: y=\sqrt{x-3}$

i) $f: y=\sqrt{5-x}$

j) $f: y=\dfrac{x}{\sqrt{10-2x}}$

k) $f: y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$

l) $f: y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

m) $f: y=\sqrt{\dfrac{x-4}{2-x}}$

n) $f: y=\dfrac{x^2-2x+3}{\sqrt{6+x-x^2}}$

o) $f: y=\sqrt{2x^2+x-1}$

Řešení:

a) $D(f)=R$

b) $x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3 \Rightarrow D(f)=R-\{3\}$

c) $x+7\neq 0 \Rightarrow x\neq -7 \Rightarrow D(f)=R-\{-7\}$

d) $x^2+1\neq 0,$ což platí $\forall x\in R \Rightarrow D(f)=R$

e) $x^2-4\neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 2 \Rightarrow D(f)=R-\{\pm 2\}$

f) $|x-3|\neq 0 \Rightarrow x\neq 3 \Rightarrow D(f)=R-\{3\}$

g) $D(f)=R$

h) $x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3 \Rightarrow D(f)=\langle 3,\infty)$

i) $5-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 5 \Rightarrow D(f)=(-\infty,5\rangle$

j) $10-2x>0 \Rightarrow x<5 \Rightarrow D(f)=(\infty,5)$

k) $x^2>0 \Rightarrow D(f)=R-\{0\}$

l) $x>0 \Rightarrow D(f)=(0,\infty)$

m) $\dfrac{x-4}{2-x} \geq 0 \Rightarrow D(f) = (2,4\rangle$

Řešíme tabulkovou metodou pomocí nulových bodů:

	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$\langle 4,\infty)$
$x-4$	-	-	+
$2-x$	+	-	-
	-	+	-

n) $6+x-x^2 > 0 \Rightarrow -(x+2)(x-3) > 0 \Rightarrow (x+2)(3-x) > 0 \Rightarrow D(f) = (-2,3)$

Řešíme tabulkovou metodou nebo pomocí grafu kvadratické funkce.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
$x+2$	-	+	+
$3-x$	+	+	-
	-	+	-

o) $2x^2+x-1 \geq 0 \Rightarrow 2(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty,1\rangle \cup \left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right)$

Řešíme tabulkovou metodou nebo pomocí grafu kvadratické funkce.

	$(-\infty,-1\rangle$	$\left\langle -1,\dfrac{1}{2}\right\rangle$	$\left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right)$
$x+1$	-	+	+
$x-\dfrac{1}{2}$	-	-	+
	+	-	+

12. Funkce *f* je dána grafem. Určete její definiční obor a obor hodnot.

Řešení: $D(f) = R \wedge H(f) = \langle 2, \infty)$

13. Určete, zda se jedná o funkci:

Řešení: Není splněna podmínka, že jednomu *x* je přiřazena právě jedna hodnota *y*. Nejedná se o funkci.

14. Určete, zda se jedná o funkci:

Řešení: Ano, jedná se o funkci. Jednomu *x* je přiřazena právě jedna hodnota *y*.

15. Funkce je zadána grafem. Určete:
    a) Definiční obor,
    b) Obor hodnot,
    c) Funkční hodnotu v bodě 0

Řešení:

a) $D(f) = \langle -3, 2)$

b) $H(f) = \langle 0, 4\rangle$

c) $f(0) = 4$

16. Určete, zda se jedná o funkci:

Řešení: Není splněna podmínka, že jednomu x je přiřazena právě jedna hodnota y. Nejedná se o funkci.

17. Určete, zda následující funkce je sudá nebo lichá:

a) $f: y = x^2; x \in \langle -1, 1\rangle$

b) $f: y = x^3; x \in (-3, 3)$

c) $f: y = x^2 - x^3; x \in \langle -3, 3)$

d) $f: y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

e) $f: y = \dfrac{x}{1-x^2}$

f) $f: y = \dfrac{x^2}{1-x}$

g)

Řešení:

a) $\forall x \in D(f): x \in D(f) \wedge (-x) \in D(f)$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(-x) &= (-x)^2 = x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Funkce je sudá.

b) $\forall x \in D(f): x \in D(f) \wedge (-x) \in D(f)$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f(-x) &= (-x)^3 = -x^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Funkce je lichá.

c) $-3 \in D(f) \wedge 3 \notin D(f)$. Funkce není ani sudá, ani lichá.

d) $D(f) = R$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{1+x^2} \\ f(-x) &= \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Funkce je sudá.

e) $D(f) = R - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x}{1-x^2} \\ f(-x) = \dfrac{-x}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x}{1-x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Funkce je lichá.

f) $D(f) = R - \{-1\}$. Funkce není ani sudá, ani lichá.

18. Funkce je určena grafem. Určete, zda je sudá nebo lichá.

a)

b)

c)

Řešení:

a) Funkce je sudá. Graf je souměrný podle osy *y*.
b) Funkce je lichá. Graf je souměrný podle počátku.
c) Funkce není ani sudá, ani lichá.

19. Určete, zda je funkce na definičním oboru rostoucí nebo klesající.

a)

b)

c)

Řešení:

a) Funkce je na definičním oboru $D(f)=R$ rostoucí. Je splněna podmínka $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$.

b) Funkce je na definičním oboru $D(f)=R$ klesající. Je splněna podmínka $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 > x_2 \wedge f(x_1) > f(x_2)$.

c) Funkce na definičním oboru není ani rostoucí ani klesající.

20. Funkce je dána grafem. Určete:
    a) zda rostoucí nebo klesající na definičním oboru,
    b) intervaly, ve kterých je rostoucí,
    c) intervaly, ve kterých je klesající,
    d) zda je sudá nebo lichá.

A) B)

Řešení:

A)

a) Funkce není na definičním oboru ani rostoucí, ani klesající,
b) funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$,
c) funkce je klesající na intervalu $(0, \infty)$,
d) funkce je sudá.

B)

a) Funkce není na definičním oboru ani rostoucí, ani klesající,
b) funkce není rostoucí na žádném z intervalů,
c) funkce je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$,
d) funkce je lichá.

21. Určete, zda funkce určená grafem je omezená shora, zdola, omezená.

a) b)

c)

Řešení:

a) Funkce je omezená zdola i shora, je omezená. $H(f)=\langle -2,2\rangle$

b) Funkce je omezená shora. $H(f)=(-\infty,2\rangle$

c) Funkce je omezená zdola. $H(f)=(-3,\infty)$

22. Určete, zda funkce zadaná grafem, má na definičním oboru extrémy.

a) b)

c)

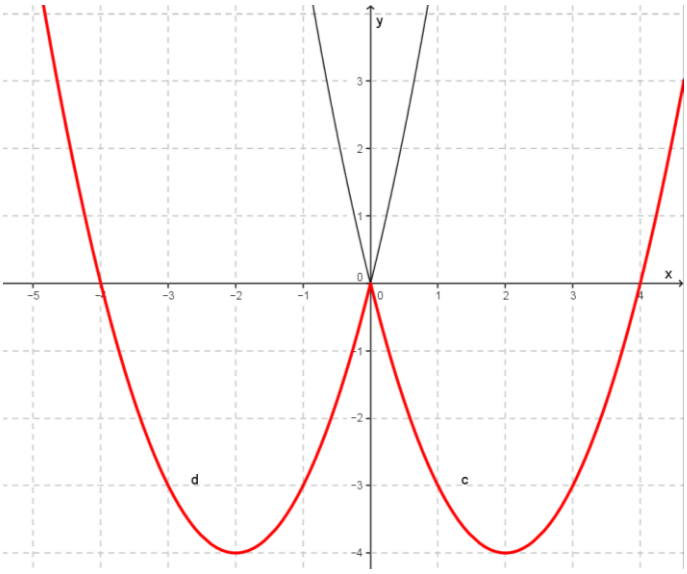
Řešení:

a) Funkce má extrém (maximum) pouze v bodě 0. V bodě -2 není definována.
b) Funkce má extrém v bodě 0 maximum.
c) Funkce má extrém v bodě 0 minimum a je omezená zdola.

4.2. Grafy funkcí

1. Načrtněte graf funkce $y = x^2 - 4|x|$.

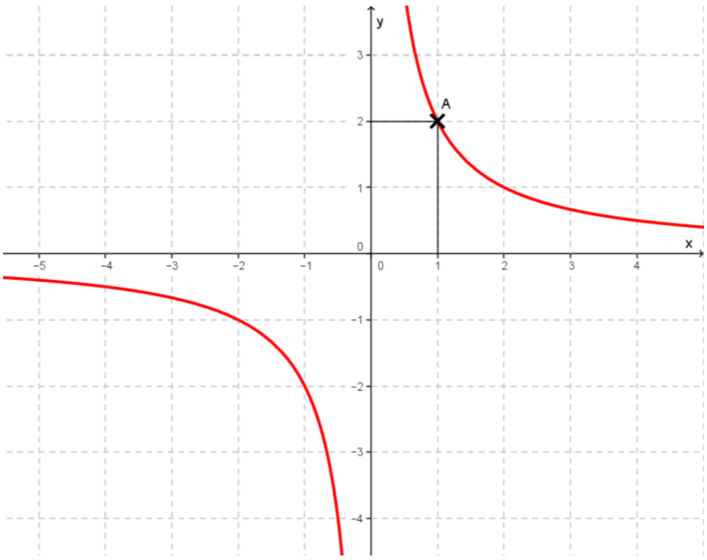
Řešení:



$$x \geq 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x,\ V[2,-4]$$
$$x \leq 0 \Rightarrow y = x^2 + 4x,\ V[-2,-4]$$

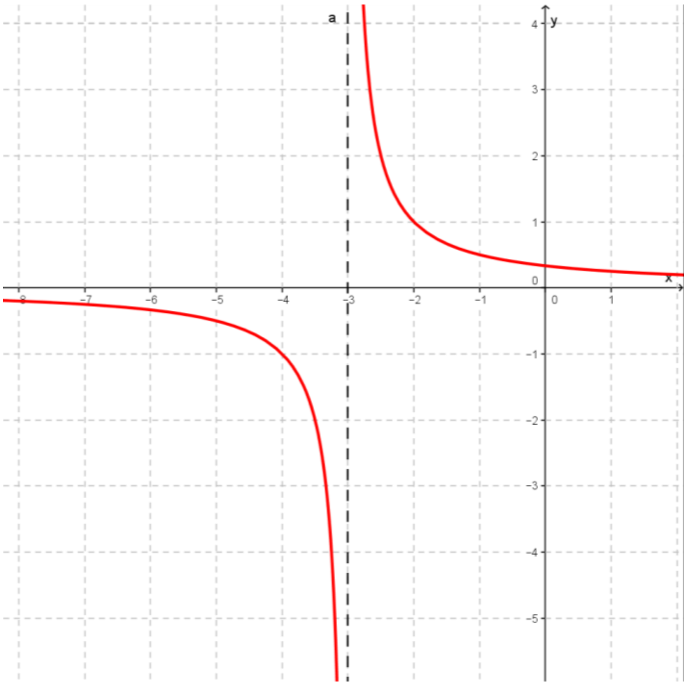
2. Načrtněte graf funkce $y = \dfrac{2}{x}$.

Řešení:



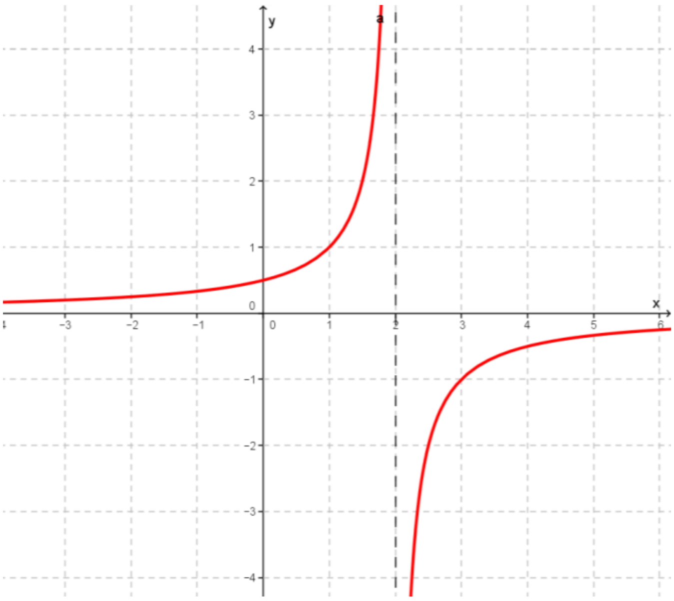
3. Načrtněte graf funkce $y = \dfrac{1}{x+3}$.

Řešení:



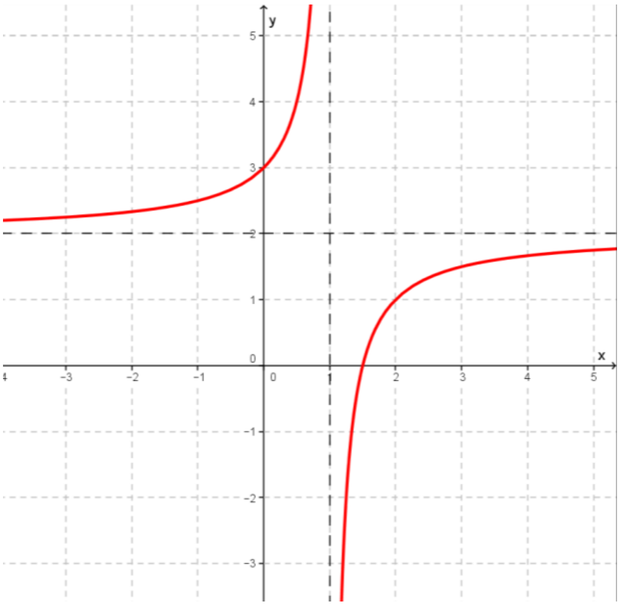
4. Načrtněte graf funkce $y = -\dfrac{1}{x-2}$.

Řešení:



5. Načrtněte graf funkce $y = -\frac{1}{x-1} + 2$.

Řešení:



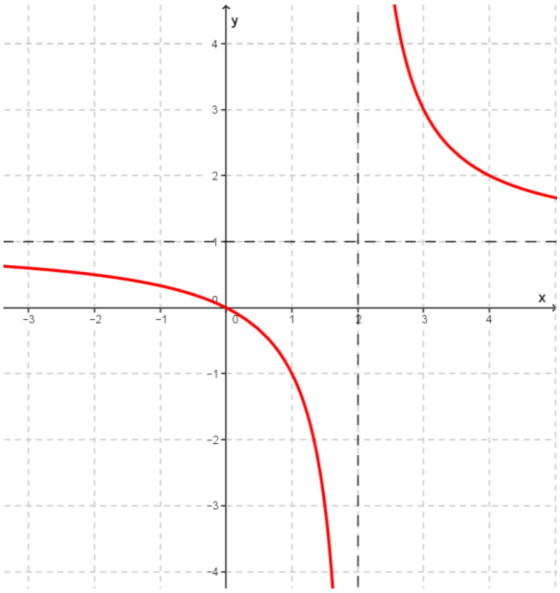
6. Načrtněte graf funkce $y = \frac{x}{x-2}$.

Řešení:

$x:(x-2) = 1 + \frac{2}{x-2}$

$P[2,1]$

$k = 2 \Rightarrow 1.$ a 3. kvadrant



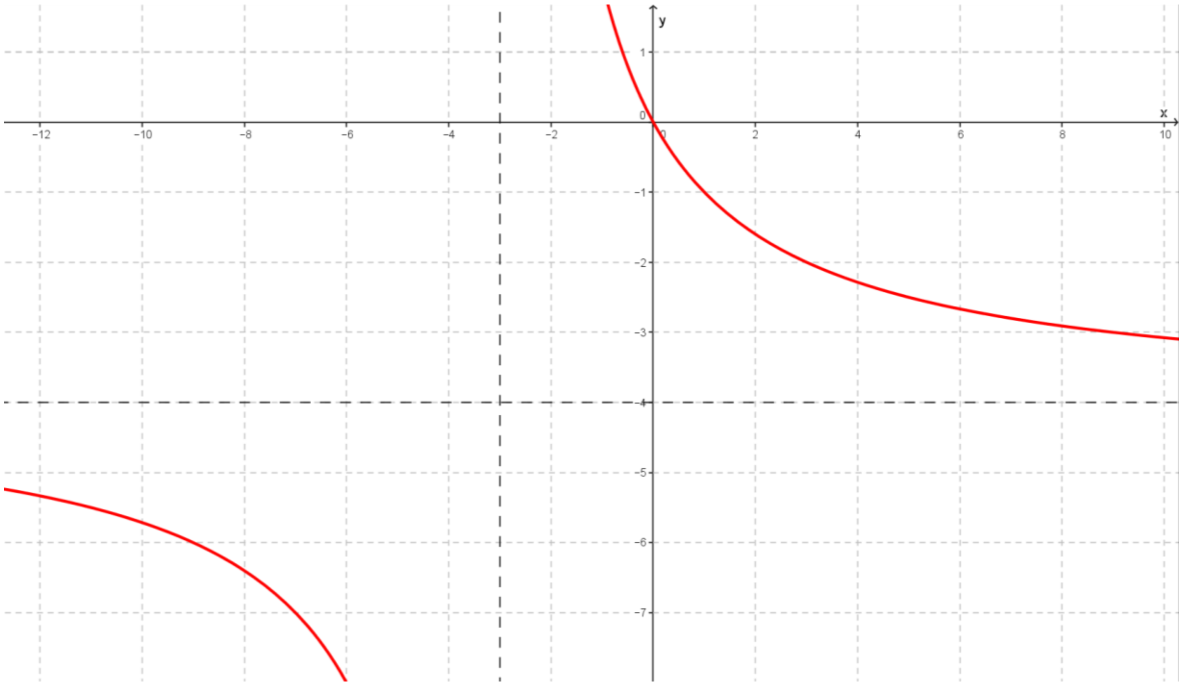
7. Načrtněte graf funkce $y = -\frac{4x}{x+3}$.

Řešení:

$$\left(-4x\right):\left(x+3\right) = -4 + \frac{12}{x+3}$$

$$P\left[-3,-4\right]$$

$$k = 12 \Rightarrow 1.\ \text{a}\ 3.\ \text{kvadrant}$$



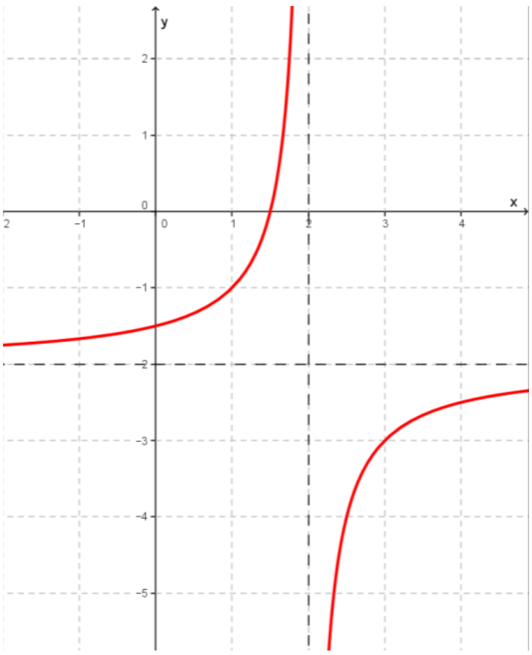
8. Načrtněte graf funkce $y = \frac{-2x+3}{x-2}$.

Řešení:

$$\left(-2x+3\right):\left(x-2\right) = -2 - \frac{1}{x-2}$$

$$P\left[2,-2\right]$$

$$k = -1 \Rightarrow 2.\ \text{a}\ 4.\ \text{kvadrant}$$



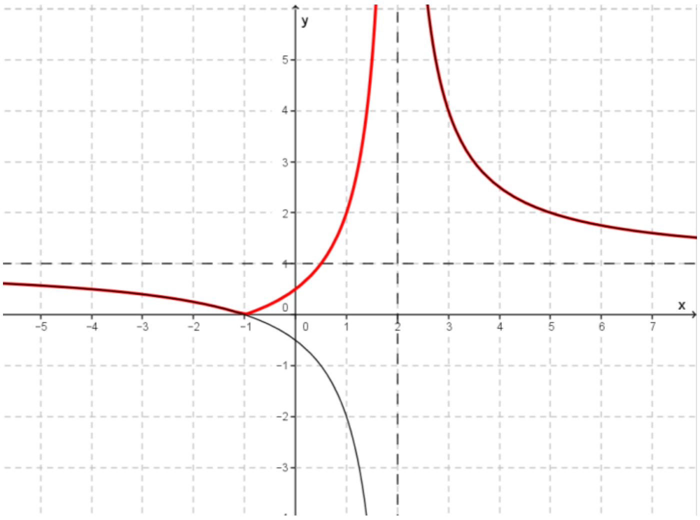
9. Načrtněte graf funkce $y=\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$.

Řešení:

Načrtneme graf y=$\dfrac{x+1}{x-2}$, část grafu pod osou x zobrazíme v osové souměrnosti nad osu x.

$(x+1):(x-2)=1+\dfrac{3}{x-2}$

$P[2,1]$

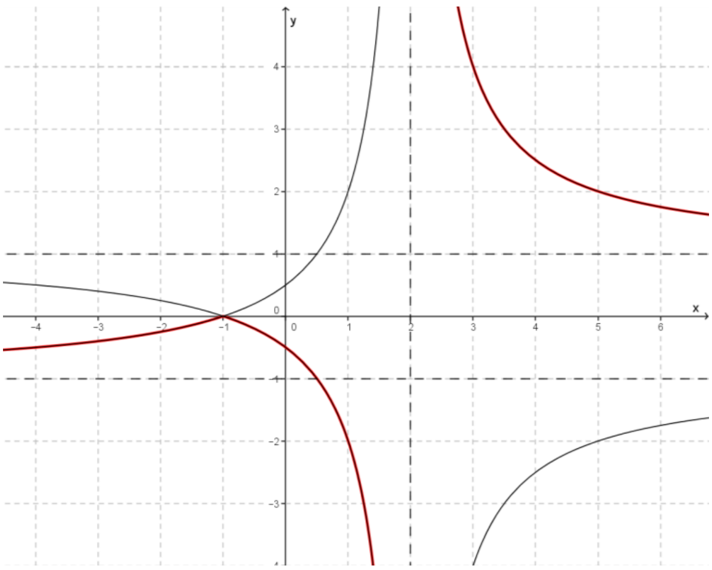


10. Načrtněte graf funkce $y=\dfrac{|x+1|}{x-2}$.

Řešení:

$x\geq -1 \Rightarrow y=\dfrac{x+1}{x-2} \Rightarrow y=1+\dfrac{3}{x-2}$

$x\leq -1 \Rightarrow y=\dfrac{-x-1}{x-2} \Rightarrow y=-1-\dfrac{3}{x-2}$

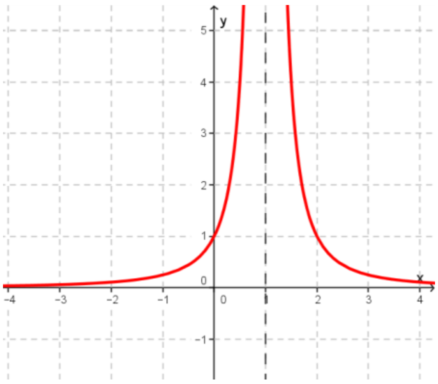


11. Načrtněte graf funkce $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$.

Řešení:

$$y=\frac{1}{x^2-2x+1}$$

$$y=\frac{1}{(x-1)^2},D(f)=R-\{1\},$$ 1. a 2. kvadrant



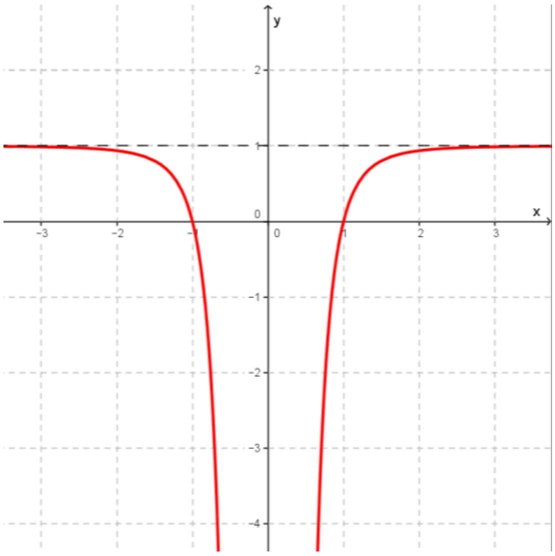
12. Načrtněte graf funkce:

a) $y=(x-1)^4$

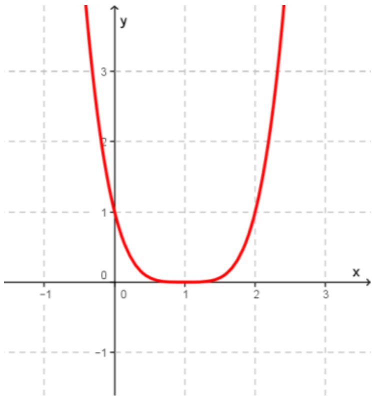
b) $y=-x^{-4}+1$

Řešení:

a)



b)



13. Načrtněte graf funkce:

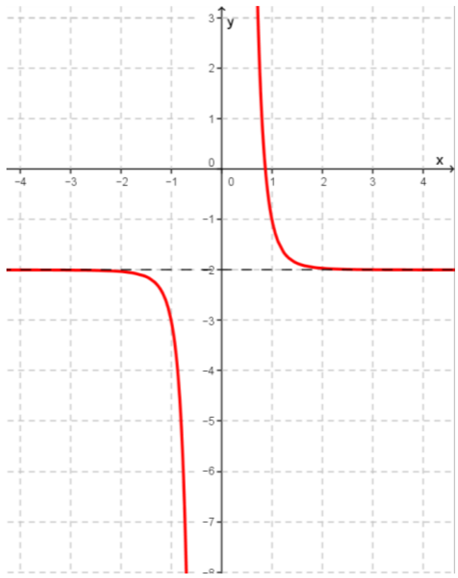
a) $y = x^5 - 2$

b) $y = (x-2)^{-5}$

Řešení:

a)

b)



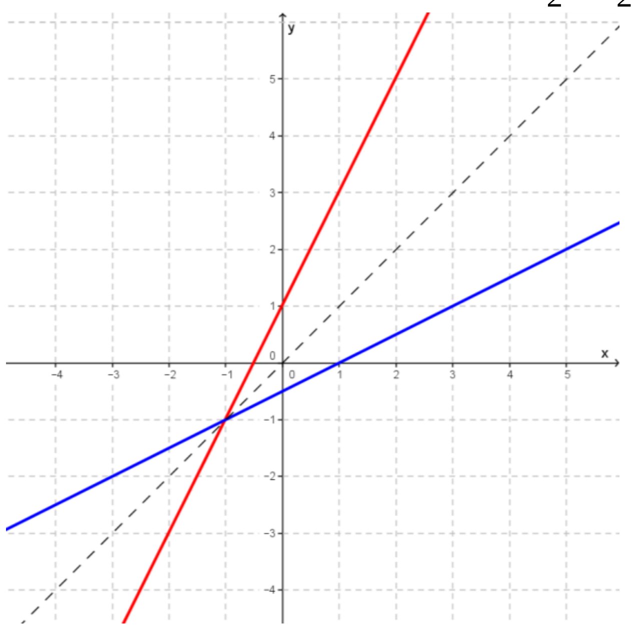
14. Je dána funkce $y = 2x + 1$. Určete definiční obor funkce, obor hodnot, graf funkce a najděte k této funkci funkci inverzní. Grafy zakreslete v téže soustavě souřadnic.

Řešení:

$D(f) = R;\ H(f) = R$

funkce je prostá $\Rightarrow$ existuje funkce inverní f^{-1}

$$f : y = 2x + 1 \Rightarrow f^{-1} : x = 2y + 1 \Rightarrow f^{-1} : 2y = x - 1 \Rightarrow f^{-1} : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$



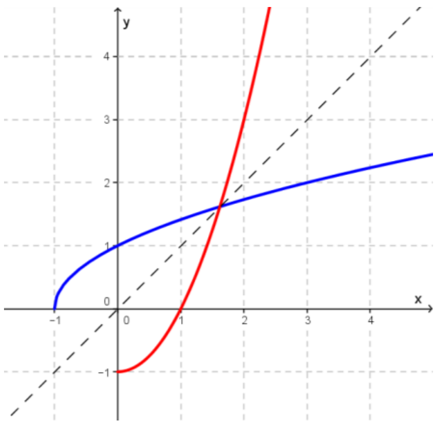
15. Je dána funkce $y = x^2 - 1,\ x \in \langle 0, \infty)$. Zdůvodněte, že k této funkci existuje funkce inverzní. Funkci najděte a určete graf. Grafy zakreslete v téže soustavě souřadnic.

Řešení:

$y = x^2 - 1,\ x \in \langle 0, \infty),\ H(f) = \langle -1, \infty)$

Funkce je prostá $\Rightarrow$ existuje funkce inverzní

$f: y = x^2 - 1 \Rightarrow f^{-1}: x = y^2 - 1 \Rightarrow f^{-1}: y^2 = x + 1 \Rightarrow f^{-1}: y = \sqrt{x+1},\ D(f) = \langle -1, \infty)$



16. Jsou dány funkce $f: y = -3x + 5, g: y = -\frac{1}{3}x + 5$. Určete, zda funkce jsou vzájemně inverzní. Načrtněte grafy.

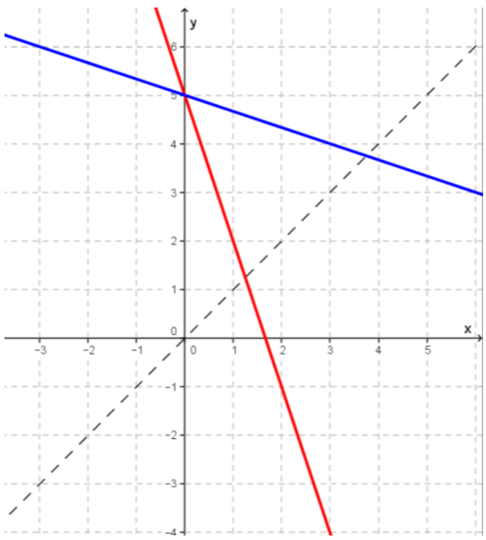
Řešení:

$f: y = -3x + 5,\ g: y = -\frac{1}{3}x + 5$

$f^{-1}: x = -3y + 5 \Rightarrow f^{-1}: 3y = -x + 5 \Rightarrow f^{-1}: y = -\frac{1}{3}x + 5$

$f^{-1} \neq g$

Funkce nejsou inverzní. Grafy nejsou osově souměrné s osou $y = x$.



17. Jsou dány funkce $f: y=-2x-1,\ x\in\langle 0,2\rangle$ a $g: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ x\in\langle 0,2\rangle$. Určete, zda funkce jsou vzájemně inverzní. Načrtněte grafy.

Řešení:

$f: y=-2x-1,\ x\in\langle 0,2\rangle,\ H(f)=\langle -5,-1\rangle$

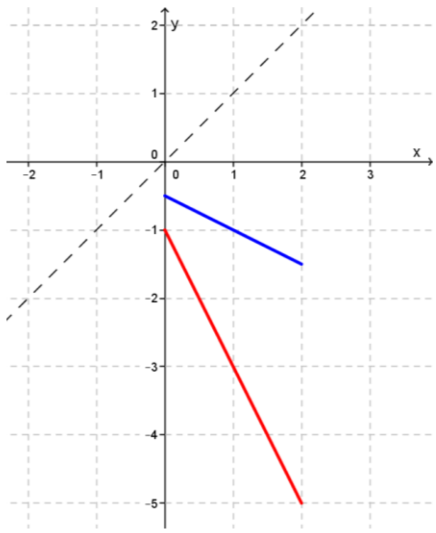
$g: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ x\in\langle 0,2\rangle$

$H(f)\neq D(f)\Rightarrow$ funkce nejsou inverzní

$f: y=-2x-1, x\in\langle 0,2\rangle, H(f)=\langle -1,-5\rangle$

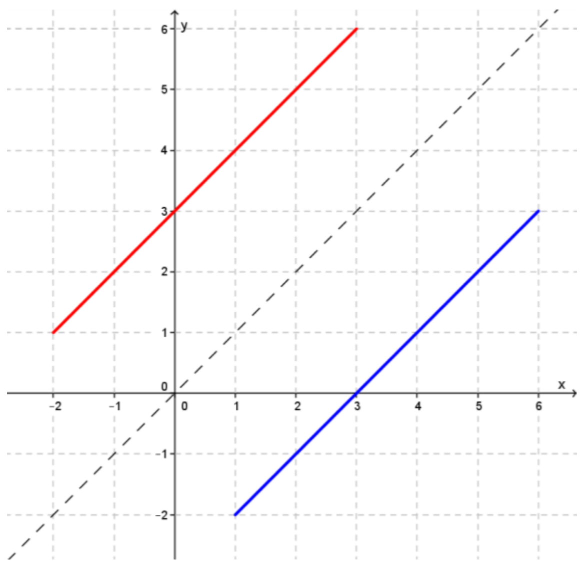
$g: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, x\in\langle 0,2\rangle$

$H(f)\neq D(f)\Rightarrow$ funkce nejsou inverzní



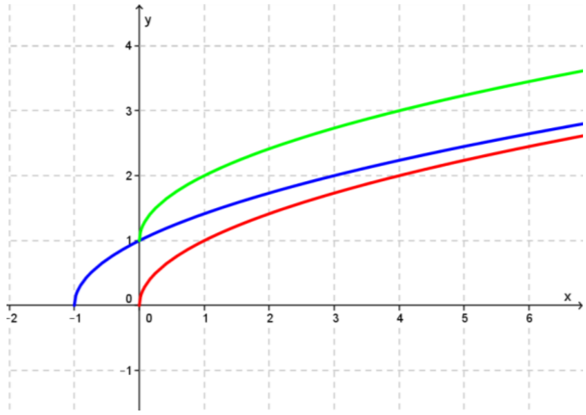
18. Jsou dány funkce $f: y=x+3,\ x\in\langle -2,3)$ a $g: y=x-3,\ x\in\langle 1,6)$. Určete, zda funkce jsou vzájemně inverzní. Načrtněte grafy.

Řešení:



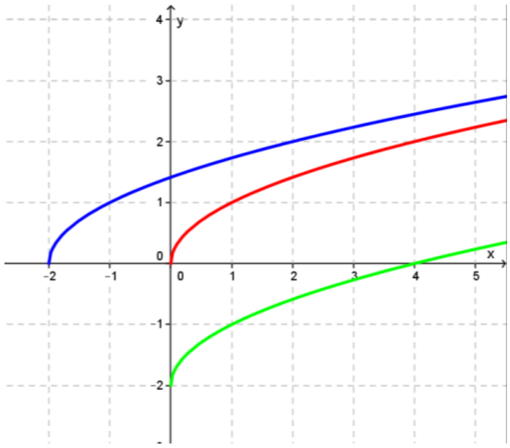
19. Načrtněte v téže soustavě souřadnic funkce $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{x+1},\ y=\sqrt{x}+1$.

Řešení:



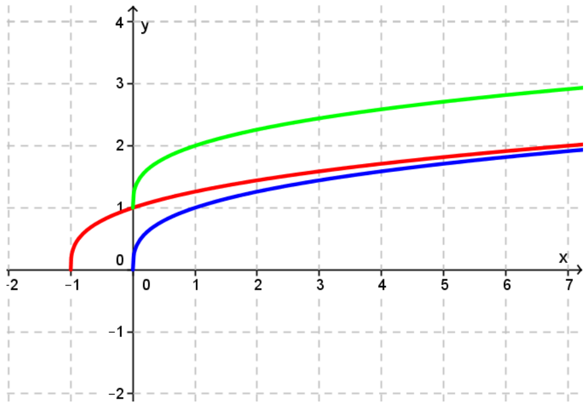
20. Načrtněte v téže soustavě souřadnic funkce $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{x-2},\ y=\sqrt{x}-2$.

Řešení:

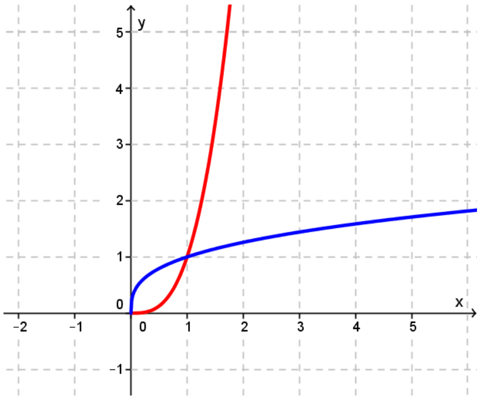


21. Načrtněte v téže soustavě souřadnic funkce $y=\sqrt[3]{x},\ y=\sqrt[3]{x}+1,\ y=\sqrt[3]{x+1}$.

Řešení:

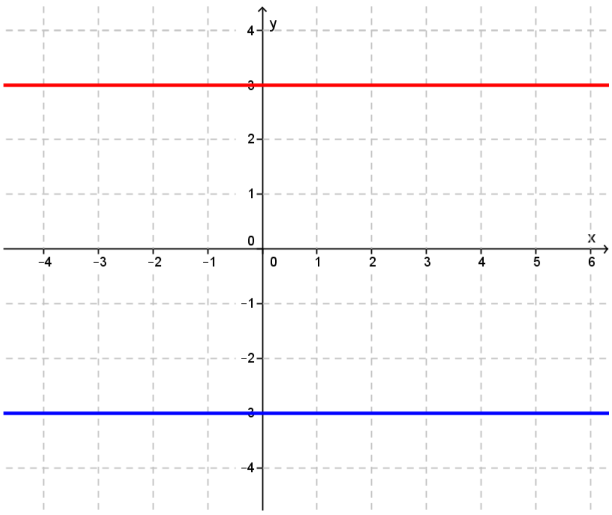


22. Funkce jsou zadány grafem. Určete, zda jsou inverzní.



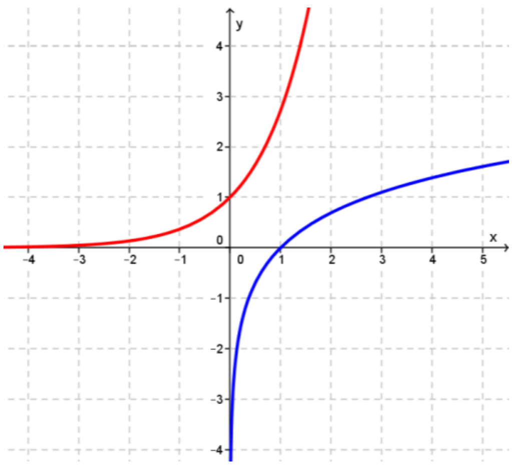
Řešení: Ano, graf je souměrný podle osy $y = x$.

23. Funkce jsou zadány grafem. Určete, zda jsou inverzní.



Řešení: Ne, graf je souměrný podle osy $y = x$.

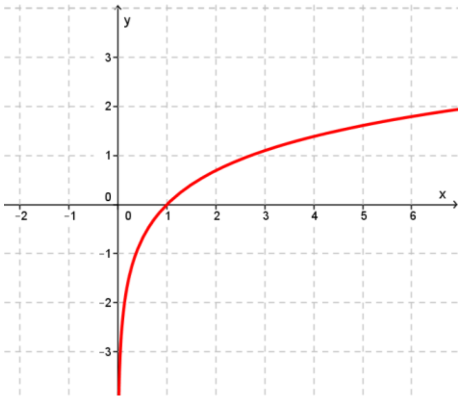
24. Funkce jsou zadány grafem. Určete, zda jsou inverzní.



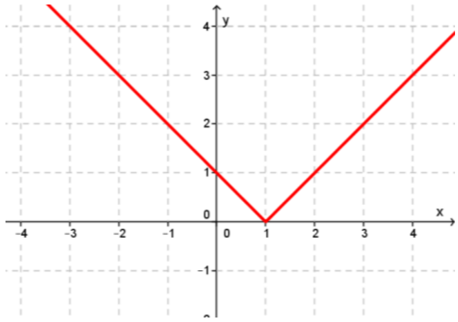
Řešení: Ano, graf je souměrný podle osy $y = x$.

25. Funkce jsou zadány grafem. Určete, ke kterým existuje funkce inverzní.

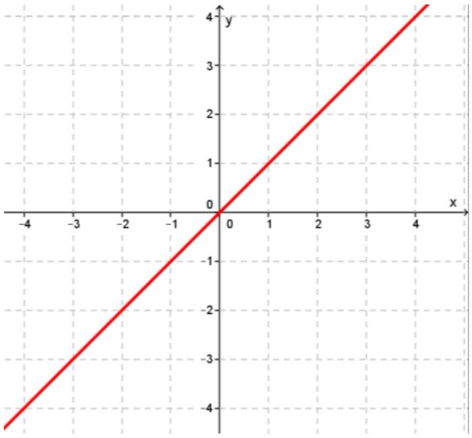
a)



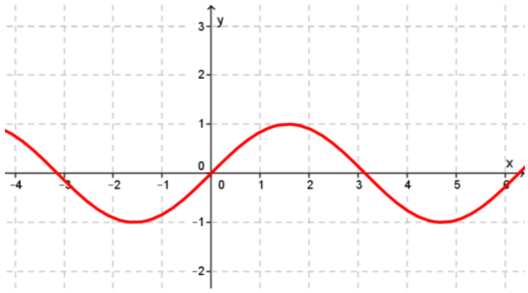
b)



c)



d)

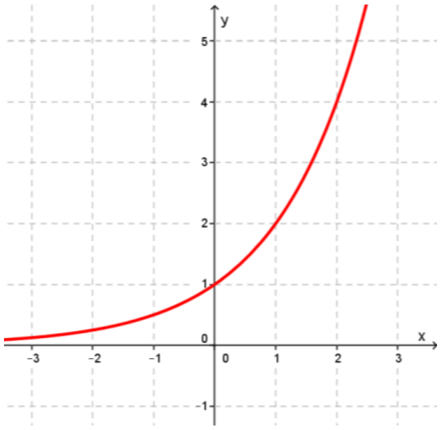


Řešení: a) a c) jsou prosté, funkce inverzní existuje; b) a d) nejsou prosté, inverzní funkci neexistuje

4.3.Exponenciální a logaritmické funkce

1. Načrtněte graf funkce $y = 2^x$. Určete $D(f)$, $H(f)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.

Řešení:



$D(f) = R$

$H(f) = (0, \infty)$

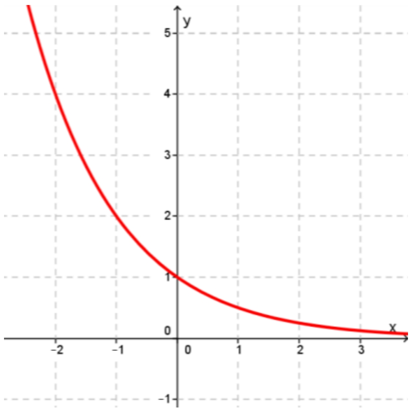
$f(-1) = \frac{1}{2}$

$f(0) = 1$

$f(2) = 4$

2. Načrtněte graf funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Určete její $D(f)$, $H(f)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.

Řešení:



$D(f) = R$

$H(f) = (0, \infty)$

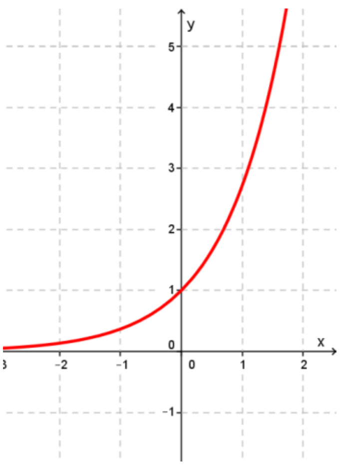
$f(-1) = 2$

$f(0) = 1$

$f(2) = \frac{1}{4}$

3. Načrtněte graf funkce $y = e^x$. Určete její $D(f)$, $H(f)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.

Řešení:



$D(f) = R$

$H(f) = (0, \infty)$

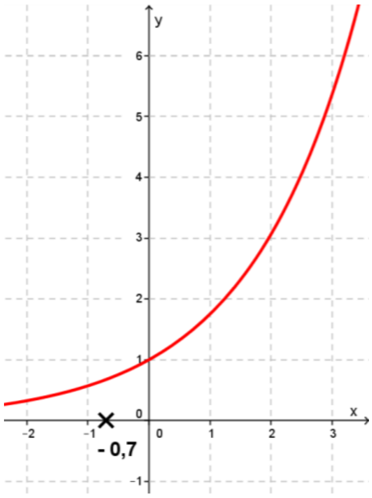
$f(-1) = \frac{1}{e}$

$f(0) = 1$

$f(2) = e^2$

4. Určete, zda $\left(\frac{7}{4}\right)^{-0,7}$ je větší, menší nebo rovno 1.

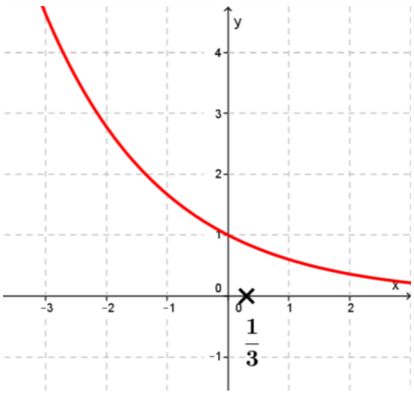
Řešení:



Hodnota je menší než 1.

5. Určete zda $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ je větší, menší nebo rovno 1.

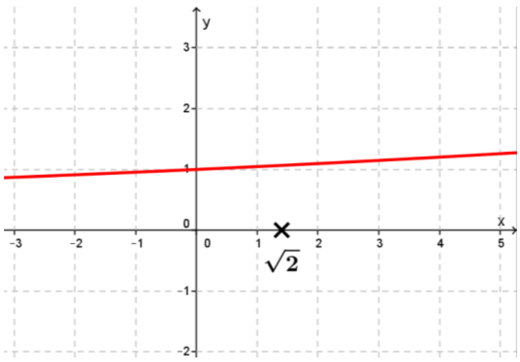
Řešení:



Hodnota je menší než 1.

6. Určete zda $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ je větší, menší nebo rovno 1.

Řešení:

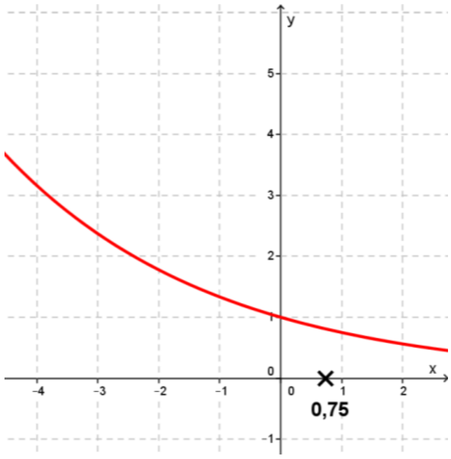


Hodnota je větší než 1.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

7. Určete zda $0,75^{0,75}$ je větší, menší nebo rovno 1.

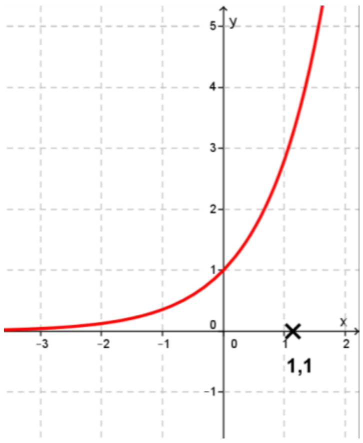
Řešení:



Hodnota je menší než 1.

8. Určete zda $2,8^{1,1}$ je větší, menší nebo rovno 1.

Řešení:



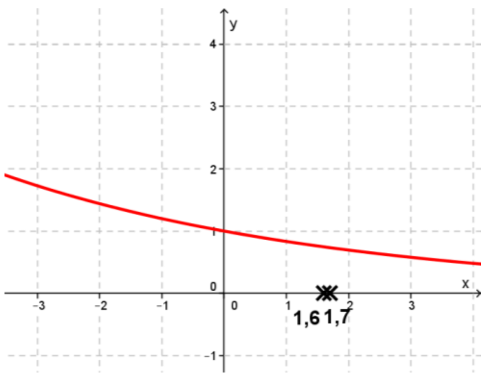
Hodnota je větší než 1.

9. Rozhodně, zda jsou výroky pravdivé. Využijte graf.

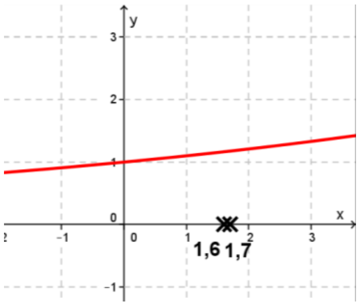
a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1,7} < \left(\frac{5}{6}\right)^{1,6}$ b) $\left(\frac{11}{10}\right)^{1,7} < \left(\frac{11}{10}\right)^{1,6}$

Řešení:

a) Výrok je pravdivý.



b) Výrok je nepravdivý.



10. Rozhodněte, zda $a \in (0,1)$ nebo $a \in (1,\infty)$, jestliže platí $a^{\frac{2}{7}} < a^{\frac{7}{2}}$.

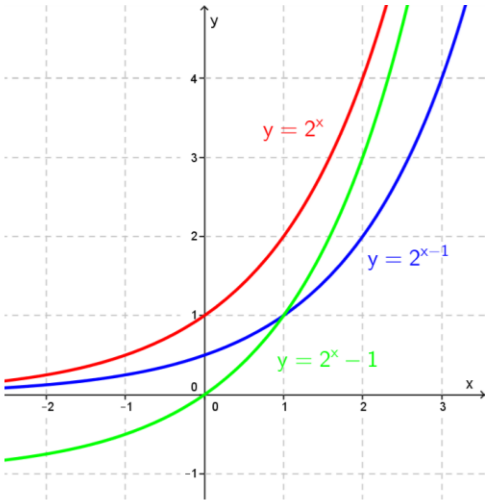
Řešení: $\left(\frac{2}{7} < \frac{7}{2}\right) \wedge \left(a^{\frac{2}{7}} < a^{\frac{7}{2}}\right) \Rightarrow$ funkce je rostoucí $\Rightarrow a \in (1,\infty)$

11. Rozhodněte, zda $a \in (0,1)$ nebo $a \in (1,\infty)$, jestliže platí $a^{\frac{17}{3}} < a^{\frac{3}{17}}$.

Řešení: $\left(\frac{17}{3} > \frac{3}{17}\right) \wedge \left(a^{\frac{17}{3}} < a^{\frac{3}{17}}\right) \Rightarrow$ funkce je klesající $\Rightarrow a \in (0,1)$

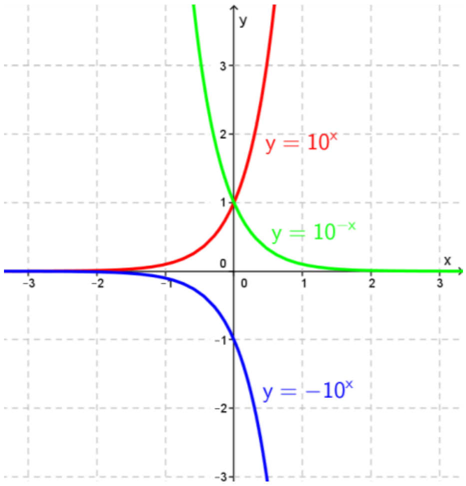
12. Načrtněte do téže soustavy souřadnic grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^x - 1$.

Řešení:



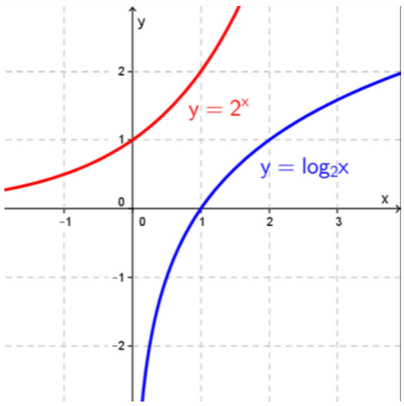
13. Načrtněte do téže soustavy souřadnic grafy $y = 10^x$, $y = -10^x$, $y = 10^{-x}$.

Řešení:



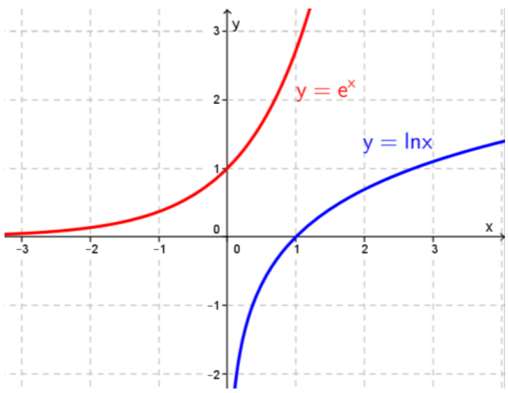
14. Načrtněte grafy funkcí $y = 2^x$ a $y = \log_2 x$. Jaká je souvislost obou funkcí?

Řešení: Jde o funkce inverzní.



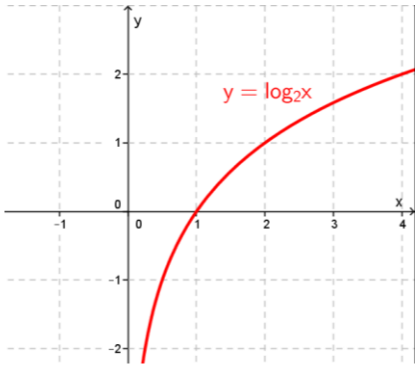
15. Načrtněte grafy funkcí $y = e^x$ a $y = \ln x$. Jaká je souvislost obou funkcí?

Řešení: Jde o funkce inverzní.



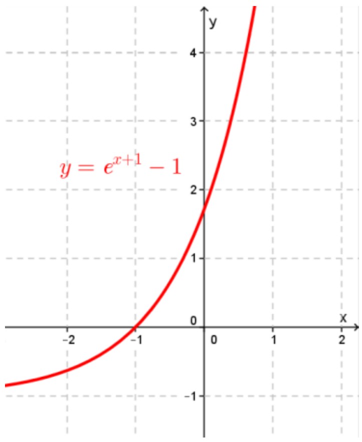
16. Načrtněte graf funkce $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Určete $D(f), H(f)$, zda je funkce rostoucí nebo klesající, sudá nebo lichá.

Řešení: $D(f) = (0, \infty)$ $H(f) = R$. Funkce je klesající, není sudá ani lichá.



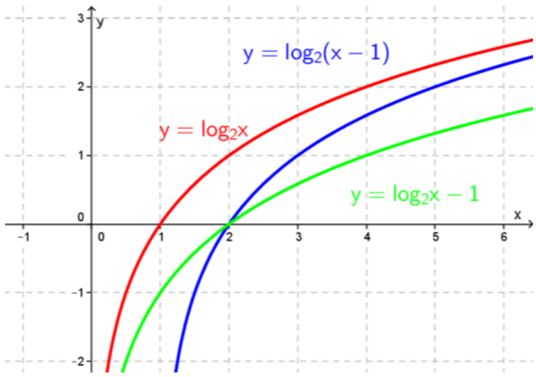
17. Načrtněte graf funkce $y = e^{x+1} - 1$. Určete $D(f)$, $H(f)$, zda je funkce rostoucí nebo klesající, sudá nebo lichá.

Řešení: $D(f) = R$, $H(f) = (-1, \infty)$. Funkce je rostoucí, není sudá ani lichá.



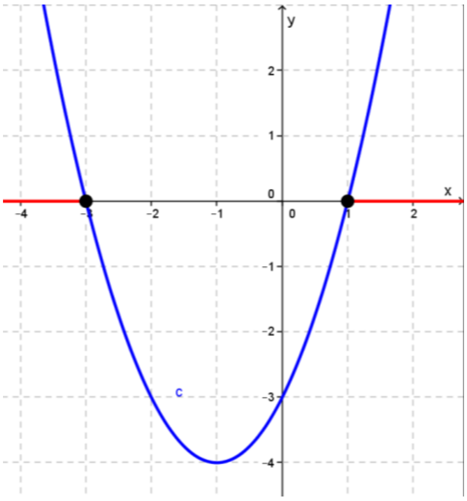
18. Načrtněte grafy funkcí $y = \log_2 x, y = \log_2(x-1), y = \log_2 x - 1$.

Řešení:



19. Určete definiční obor funkce $y = \log_5\left(x^2 + 2x - 3\right)$.

Řešení:



$$x^2 + 2x - 3 > 0$$
$$(x+3)(x-1) > 0$$
$$D(f) = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

20. Určete definiční obor funkce $y = \log_7 \sqrt{x-1}$.

Řešení: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D(f) = (1, \infty)$

21. Určete definiční obor funkce $y = \log_{0,3} \dfrac{x+2}{x-1}$.

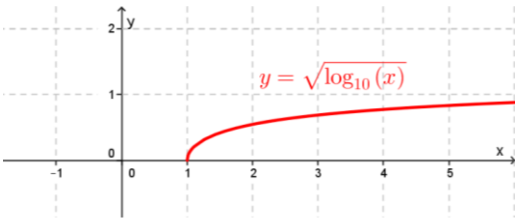
Řešení: $\dfrac{x+2}{x-1} > 0 \Rightarrow x_{01} = 1, x_{02} = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$x+2$	–	+	+
$x-1$	–	–	+
	+	–	+

$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

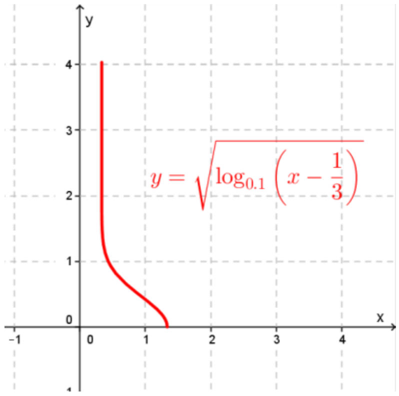
22. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\log_{10} x}$.

Řešení: $(\log_{10} x \geq 0 \wedge x > 0) \Rightarrow (x \geq 1 \wedge x > 0) \Rightarrow D(f) = \langle 1, \infty)$



23. Určete definiční obor funkce $y=\sqrt{\log_{0,1}\left(x-\frac{1}{3}\right)}$.

Řešení: $\log_{0,1}\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 0\Rightarrow 0<x-\frac{1}{3}\leq 1\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right\rangle\Rightarrow D(f)=\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right\rangle$



24. Určete všechna *x*, pro která platí:
   a) $\log_2 x>\log_2 8$.
   b) $\log_{0,1} x>\log_{0,1} 0,2$
   c) $\log_x 5>\log_x 12$
   d) $\log_x 0,5<\log_x 0,12$

Řešení:
   a) Funkce $y=\log_2 x$ je rostoucí, tedy $x>8$.
   b) Funkce $\log_{0,1} x$ je klesající, tedy $x<0,2$.
   c) $5<12\wedge\log_x 5<\log_x 12\Rightarrow$ Funkce je rostoucí, tedy $x\in(1,\infty)$.
   d) $0,5>0,12\wedge\log_x 0,5<\log_x 0,12\Rightarrow$ Funkce je klesající, tedy $x\in(0,1)$.

25. Vypočtěte:
   a) $\log_5 5$
   b) $\log_{0,5} 2$
   c) $\log_2 8$
   d) $\log_2 1$

Řešení:
   a) $\log_5 5=1\Leftrightarrow 5^1=5$
   b) $\log_{0,5} 2=-1\Leftrightarrow 0,5^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
   c) $\log_2 8=3\Leftrightarrow 2^3=8$
   d) $\log_2 1=0\Leftrightarrow 2^0=1$

26. Vypočtěte:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

b) $\log_{0,5} 4$

c) $\log_{\sqrt{7}} 7$

d) $\ln \sqrt[3]{e}$

Řešení:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

b) $\log_{0,5} 4 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

c) $\log_{\sqrt{7}} 7 = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

d) $\ln \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

27. Vypočtěte:

a) $7^{\log_7 4}$

b) $5^{1+\log_5 3}$

c) $e^{\ln 1}$

Řešení: Využijeme vzorec: $a^{\log_a b} = b$

a) $7^{\log_7 4} = 4$

b) $5^{1+\log_5 3} = 5^{\log_5 5+\log_5 3} = 5^{\log_5 15} = 15$

c) $e^{\ln 1} = 1$

28. Určete x, aby platilo:

a) $\log_x 3 = 3$

b) $\log_x 0,001 = -3$

c) $\log_x 16 = 2$

Řešení:

a) $\log_x 3 = 3 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$

b) $\log_x 0,001 = -3 \Rightarrow x^{-3} = \frac{1}{1000} \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$

c) $\log_x 16 = 2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

29. Vypočtěte:

a) $2\log_5 4 - 3\log_5 2 + 1$

b) $\log_3 27^{-0,5}$

c) $\log_3 243 + \log_4 \frac{1}{256} + \log_{0,2} 0,04$

d) $\left(\log_5 \frac{1}{25} - \log_{\frac{1}{3}} 729\right)^3$

e) $\log_{0,2} 0,0016 + 3\log_8 0,125$

f) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 0,25 - \log_{0,25} 16}$

g) $\log_2 \log_2 16$

h) $\log \sqrt[8]{10000} + \log_2 \sqrt[4]{8}$

Řešení:

a) $2\log_5 4 - 3\log_5 2 + 1 = \log_5 16 - \log_5 8 + \log_5 5 = \log_5 \frac{16\cdot 5}{8} = \log_5 10$

b) $\log_3 27^{-0,5} = -0,5\log_3 27 = -0,5\cdot 3 = -1,5$

c) $\log_3 243 + \log_4 \frac{1}{256} + \log_{0,2} 0,04 = 5 - 4 + 2 = 3$

d) $\left(\log_5 \frac{1}{25} - \log_{\frac{1}{3}} 729\right)^3 = (-2+6)^3 = 64$

e) $\log_{0,2} 0,0016 + 3\log_8 0,125 = 4 - 3 = 1$

f) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 0,25 - \log_{0,25} 16} = \sqrt{2+2} = 2$

g) $\log_2 \log_2 16 = \log_2 4 = 2$

h) $\log \sqrt[8]{10000} + \log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{8}\cdot 4 = \frac{1}{2}$

4.4. Exponenciální a logaritmické rovnice

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:
   a) $2^x = 64$
   b) $10^x = 0,01$
   c) $4^{3x-2} = 256$
   d) $2^{x-4} = \left(\sqrt{2}\right)^{2-3x}$
   e) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$
   f) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-2}$
   g) $\left(1-\frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{x-5}}$
   h) $\sqrt[3]{2^{2x-3}} = \sqrt[7]{(0,5)^{3-x}}$
   i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{25}$

Řešení:

a)
$$2^x = 64$$
$$2^x = 2^6$$
$$x = 6$$
$$K = \{6\}$$

b)
$$10^x = 0,01$$
$$10^x = 10^{-2}$$
$$x = -2$$
$$K = \{-2\}$$

c)
$$4^{3x-2} = 256$$
$$4^{3x-2} = 4^4$$
$$3x - 2 = 4$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$
$$K = \{2\}$$

d)
$$2^{x-4} = \left(\sqrt{2}\right)^{2-3x}$$
$$2^{x-4} = 2^{\frac{1}{2}(2-3x)}$$
$$x - 4 = 1 - \frac{3}{2}x$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$
$$K = \{2\}$$

e) $$\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$$

$$x=-4$$

$$K=\{-4\}$$

f) $$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-2}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-(7x-2)}$$

$$3x+7=-7x+2$$

$$10x=-5$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

$$K=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

g) $$\left(1-\frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{x-5}}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{x-5}}$$

$$\frac{2}{3-2x}=-\frac{3}{x-5}$$

$$2x-10=-9+6x$$

$$4x=-1$$

$$x=-\frac{1}{4}$$

Podmínky: $x\neq 5\wedge x\neq\frac{3}{2}$

$$K=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

h) $$\sqrt[3]{2^{2x-3}}=\sqrt[7]{(0,5)^{3-x}}$$

$$2^{\frac{1}{3}(2x-3)}=2^{-\frac{1}{7}(3-x)}$$

$$14x-21=-9+3x$$

$$11x=12$$

$$x=\frac{12}{11}$$

$$K=\left\{\frac{12}{11}\right\}$$

Zkouška:

$$\text{L}=\sqrt[3]{2^{2\cdot\frac{12}{11}-3}}=\sqrt[3]{2^{-\frac{9}{11}}}=2^{-\frac{9}{33}}=2^{-\frac{3}{11}}$$

$$\text{P}=\sqrt[7]{(0,5)^{3-\frac{12}{11}}}=\sqrt[7]{(0,5)^{\frac{21}{11}}}=2^{-\frac{21}{77}}=2^{-\frac{3}{11}}$$

L = P

i) $$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{4}{25}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{x}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2}$$

$$x-1-\frac{1}{x}=2$$

$$x^2-3x-1=0$$

$$x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Podmínky: $x\neq 0$

$$K=\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

2. Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:

a) $3^x+3^{x+1}=108$

b) $5^{x+1}-5^{x-1}=24$

c) $3^{x+2}-3^x-24=0$

d) $7^{x+2}+2\cdot 7^{x-1}=345$

e) $\dfrac{2^x\cdot 3^{x+2}}{6^{7-x}\cdot 8^{x-4}}=\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x-9}$

f) $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$

g) $10\cdot 2^{2x-1}-7\cdot 0,5^{-2x}=-2^{2x+2}+16$

h) $1,5\cdot 0,2^{x+1}+0,8\cdot 0,2^{x-1}=0,172$

i) $4,5\cdot 3^{5x-1}+3^{5x+2}-\dfrac{5}{2}=3^{5x+1}$

Řešení:

a) $$3^x+3^{x+1}=108$$

$$3^x+3^x\cdot 3=108$$

$$4\cdot 3^x=108$$

$$3^x=27$$

$$x=3$$

$$K=\{3\}$$

b) $$5^{x+1}-5^{x-1}=24$$

$$5^x\cdot 5-5^x\cdot\frac{1}{5}=24$$

$$5^x\cdot 25-5^x=120$$

$$24\cdot 5^x=120$$

$$5^x=5$$

$$x=1$$

$$K=\{1\}$$

c) $3^{x+2}-3^{x}-24=0$

$$9\cdot 3^{x}-3^{x}-24=0$$
$$8\cdot 3^{x}=24$$
$$3^{x}=3$$
$$x=1$$
$$K=\{1\}$$

d) $7^{x+2}+2\cdot 7^{x-1}=345$

$$7^{x}\cdot 49+\frac{2}{7}\cdot 7^{x}=345$$
$$343\cdot 7^{x}+2\cdot 7^{x}=2415$$
$$345\cdot 7^{x}=2415$$
$$7^{x}=7$$
$$x=1$$
$$K=\{1\}$$

e) $\dfrac{2^{x}\cdot 3^{x+2}}{6^{7-x}\cdot 8^{x-4}}=\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x-2}$

$$\frac{2^{x}\cdot 3^{x+2}}{2^{7-x}\cdot 3^{7-x}\cdot 2^{3x-12}}=\frac{1}{3}\cdot 3^{2x-4}$$
$$2^{x-7+x-3x+12}\cdot 3^{x+2-7+x+1-2x+4}=1$$
$$2^{-x+5}\cdot 3^{0}=1$$
$$2^{-x+5}=2^{0}$$
$$x=5$$
$$K=\{5\}$$

f) $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$

$$3^{2x}\cdot\frac{1}{3}+3^{2x}\cdot\frac{1}{9}-3^{2x}\cdot\frac{1}{81}=315$$
$$35\cdot 3^{2x}=25515$$
$$3^{2x}=729$$
$$3^{2x}=3^{6}$$
$$x=3$$
$$K=\{3\}$$

g) $10 \cdot 2^{2x-1} - 7 \cdot 0,5^{-2x} = -2^{2x+2} + 16$

$$5 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^{2x} = -4 \cdot 2^{2x} + 16$$

$$2^{2x} = 8$$

$$2^{2x} = 2^3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$K = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

h) $1,5 \cdot 0,2^{x+1} + 0,8 \cdot 0,2^{x-1} = 0,172$

$$1500 \cdot 0,2 \cdot 0,2^{x} + 800 \cdot 5 \cdot 0,2^{x+1} = 172$$

$$4300 \cdot 0,2^{x} = 172$$

$$0,2^{x} = 0,04$$

$$0,2^{x} = 0,2^{2}$$

$$x = 2$$

$$K = \{2\}$$

i) $4,5 \cdot 3^{5x-1} + 3^{5x+2} - \frac{5}{2} = 3^{5x+1}$

$$1,5 \cdot 3^{5x} + 9 \cdot 3^{5x} - \frac{5}{2} = 3 \cdot 3^{5x}$$

$$7,5 \cdot 3^{5x} = \frac{5}{2}$$

$$3^{5x} = \frac{1}{3}$$

$$3^{5x} = 3^{-1}$$

$$5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

$$K = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

3. Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$

b) $4^{2x+2} + 4 = 65 \cdot 4^{x}$

c) $3^{2x} + 3 \cdot 3^{x+1} = 36$

d) $9^{x} - 3^{x} = 702$

e) $\frac{8}{9} \cdot 3^{x} = 9^{x-1} - 1$

f) $49^{x} - 686 = 35 \cdot 7^{x}$

g) $3^{x+2} - 810 = 9^{x+1}$

Řešení:

a)
$$6^{x+1}+6^{1-x}=37$$
$$6\cdot 6^x+6\cdot\frac{1}{6^x}=37$$
$$6\cdot\left(6^x\right)^2-37\cdot 6^x+6=0$$
$$6^{x_1}=6$$
$$x_1=1$$
$$6^{x_2}=\frac{1}{6}$$
$$x_2=-1$$
$$K=\{1,-1\}$$

b)
$$4^{2x+2}+4=65\cdot 4^x$$
$$16\cdot 4^{2x}-65\cdot 4^x+4=0$$
$$4^{x_1}=4$$
$$x_1=1$$
$$4^{x_2}=\frac{1}{16}$$
$$4^{x_2}=4^{-2}$$
$$x_2=-2$$
$$K=\{1,-2\}$$

c)
$$3^{2x}+3\cdot 3^{x+1}=36$$
$$3^{2x}+9\cdot 3^x-36=0$$
$$3^{x_1}=3$$
$$x_1=1$$
$$3^{x_2}=-12\Rightarrow \text{nemá řešení}$$
$$K=\{1\}$$

d)
$$9^x-3^x=702$$
$$\left(3^x\right)^2-3^x-702=0$$
$$3^{x_1}=27$$
$$3^{x_1}=3^3$$
$$x_1=3$$
$$3^{x_2}=-26\Rightarrow \text{nemá řešení}$$
$$K=\{3\}$$

e) $$\frac{8}{9}\cdot 3^{x}=9^{x-1}-1$$

$$\frac{1}{9}\cdot 3^{2x}-\frac{8}{9}\cdot 3^{x}-1=0$$

$$3^{x_1}=9$$

$$x_1=2$$

$$3^{x_2}=-1\Rightarrow \text{nemá řešení}$$

$$K=\{2\}$$

f) $$49^{x}-686=35\cdot 7^{x}$$

$$7^{2x}-35\cdot 7^{x}-686=0$$

$$7^{x_1}=49$$

$$x_1=2$$

$$7^{x_2}=-14\Rightarrow \text{nemá řešení}$$

$$K=\{2\}$$

g) $$3^{x+2}-810+9^{x+1}=0$$

$$9\cdot 3^{2x}+9\cdot 3^{x}-810=0$$

$$3^{x_1}=9$$

$$x_1=2$$

$$3^{x_2}=-10\Rightarrow \text{nemá řešení}$$

$$K=\{2\}$$

4. Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:

a) $2^{x^2+1}=1056-2^{14-x^2}$

b) $3^{x-7}=\sqrt[x]{6561}$

c) $5\sqrt[x]{16}-6=7\sqrt[2x]{16}$

d) $5^{4x-3}=7^{3x+2}$

e) $3^{x}(13-3^{x})=30$

f) $2^{x}=100$

g) $2^{-x}=1{,}8$

h) $7^{5x}=5^{7x}$

i) $10^{6-5x}=5^{7+2x}$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x}=\frac{1}{96}$

k) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}+5^{x+1}+5^{x+2}$

l) $4^{x}+3^{x+4}=4^{x+3}-3^{x+2}$

m) $4\sqrt{2^{5-7x}}=\sqrt{2}\sqrt[3]{4^{3-5x}}$

Řešení:

a)

$$2^{x^2+1}=1056-2^{14-x^2}$$

$$\text{sub.: } y=2^{x^2}$$

$$2y=1056-\frac{16384}{y}$$

$$2y^2-1056y+16384=0$$

$$y_1=512\Rightarrow 2^{x_1^2}=512\Rightarrow x_1^2=9\Rightarrow x_{11}=3, x_{12}=-3$$

$$y_2=16\Rightarrow 2^{x_2^2}=16\Rightarrow x_1^2=4\Rightarrow x_{12}=2, x_{22}=-2$$

$$K=\{-3,-2,2,3\}$$

b)

$$3^{x-7}=\sqrt[x]{6561}$$

$$3^{x-7}=3^{\frac{8}{x}}$$

$$x-7=\frac{8}{x}$$

$$x^2-7x-8=0$$

$$x_1=\frac{7+9}{2}=8$$

$$x_2=\frac{7-9}{2}=-1\Rightarrow \text{nevyhovuje}$$

$$\text{Podm.: } x\in N\setminus\{1\}$$

$$K=\{8\}$$

c)

$$5\sqrt[x]{16}-6=7\sqrt[2x]{16}$$

$$5\left(\sqrt[2x]{16}\right)^2-7\sqrt[2x]{16}-6=0$$

$$\text{sub.: } y=\sqrt[2x]{16}$$

$$5y^2-7y-6=0$$

$$y_1=2$$

$$y_2=-0,6\Rightarrow \text{nevyhovuje}$$

$$\sqrt[2x]{16}=2$$

$$2^{\frac{4}{2x}}=2$$

$$\frac{4}{2x}=1\Rightarrow x=2$$

$$\text{Podm.: } x\in N\setminus\{1\}$$

$$K=\{2\}$$

d)
$$5^{4x-3} = 7^{3x+2}$$
$$\log 5^{4x-3} = \log 7^{3x+2}$$
$$(4x-3)\log 5 = (3x+2)\log 7$$
$$4x\log 5 - 3\log 5 = 3x\log 7 + 2\log 7$$
$$x(4\log 5 - 3\log 7) = 2\log 7 + 3\log 5$$
$$x = \frac{2\log 7 + 3\log 5}{4\log 5 - 3\log 7}$$
$$x \doteq 14,53$$
$$K = \left\{\frac{2\log 7 + 3\log 5}{4\log 5 - 3\log 7}\right\}$$

e)
$$3^x(13-3^x) = 30$$
$$13\cdot 3^x - \left(3^x\right)^2 = 30$$
$$\left(3^x\right)^2 - 13\cdot 3^x + 30 = 0$$
$$\text{sub.}: y = 3^x$$
$$y^2 - 13y + 30 = 0$$
$$y_1 = 3 \Rightarrow 3^{x_1} = 3 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$y_2 = 10 \Rightarrow 3^{x_2} = 10 \Rightarrow \log 3^{x_2} = \log 10 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\log 3} \Rightarrow x_2 \doteq 2,1$$
$$K = \left\{1, \frac{1}{\log 3}\right\}$$

f)
$$2^x = 100$$
$$\log 2^x = \log 100$$
$$x\log 2 = 2$$
$$x = \frac{2}{\log 2}$$
$$K = \left\{\frac{2}{\log 2}\right\}$$

g)
$$2^{-x} = 1,8$$
$$-x\log 2 = \log 1,8$$
$$x = -\frac{\log 1,8}{\log 2}$$
$$x \doteq -0,85$$
$$K = \left\{-\frac{\log 1,8}{\log 2}\right\}$$

h)
$$7^{5x}=5^{7x}$$
$$\log 7^{5x}=\log 5^{7x}$$
$$5x\log 7=7x\log 5$$
$$x\left(5\log 7-7\log 5\right)=0$$
$$x=0$$
$$K=\{0\}$$

i)
$$10^{6-5x}=5^{7+2x}$$
$$\log 10^{6-5x}=\log 5^{7+2x}$$
$$6-5x=\left(7+2x\right)\log 5$$
$$6-5x=7\log 5+2x\log 5$$
$$x\left(2\log 5+5\right)=6-7\log 5$$
$$x=\frac{6-7\log 5}{2\log 5+5}$$
$$x\doteq 0{,}17$$
$$K=\left\{\frac{6-7\log 5}{2\log 5+5}\right\}$$

j)
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x}=\frac{1}{96}$$
$$\frac{2^{x+1}}{3^{x+1}}\cdot\frac{3^{x+1}}{2^{2x+2}}\cdot\frac{1}{2^{3x}}=\frac{1}{96}$$
$$2^{-4x-1}=96^{-1}$$
$$4x\log 2+\log 2=\log 96$$
$$x=\frac{\log 96-\log 2}{4\log 2}$$
$$x\doteq 1{,}396$$
$$K=\left\{\frac{\log 96-\log 2}{4\log 2}\right\}$$

k)
$$3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}+5^{x+1}+5^{x+2}$$
$$3^{x}(1+3+9)=5^{x}(1+5+25)$$
$$\frac{3^{x}}{5^{x}}=\frac{31}{13}$$
$$x\log\frac{3}{5}=\log\frac{31}{13}$$
$$x=\frac{\log 31-\log 13}{\log 3-\log 5}$$
$$K=\left\{\frac{\log 31-\log 13}{\log 3-\log 5}\right\}$$

l) $$4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$$
$$4^x(4^3 - 1) = 3^x(3^4 + 3^2)$$
$$4^x \cdot 63 = 3^x \cdot 90$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{90}{63}$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{10}{7}$$
$$x \log\frac{4}{3} = \log\frac{10}{7}$$
$$x = \frac{\log 10 - \log 7}{\log 4 - \log 3}$$
$$K = \left\{\frac{\log 10 - \log 7}{\log 4 - \log 3}\right\}$$

m) $$4\sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2}\sqrt[3]{4^{3-5x}}$$
$$2^2 \cdot 2^{\frac{5-7x}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{6-10x}{3}}$$
$$\frac{5-7x+4}{2} = \frac{12-20x+3}{6}$$
$$27 - 21x = 15 - 20x$$
$$x = 12$$
$$K = \{12\}$$

5. Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 405 \cdot 2^{x-1}$

b) $\sqrt[x]{81} - 8\left(\sqrt[2x]{81} - 2\right) = 1$

c) $2^x \cdot 2^{3(x-1)} + 2^{1-x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x = 1$

Řešení:

a) $$3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 405 \cdot 2^{x-1}$$
$$3^x(3 + 12 + 45) = 405 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2}$$
$$3^x \cdot 120 = 405 \cdot 2^x$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$
$$x = 3$$
$$K = \{3\}$$

b) $\sqrt[x]{81}-8\left(\sqrt[2x]{81}-2\right)=1$

$$\text{sub.: } y=\sqrt[2x]{81}$$
$$y^2=\sqrt[x]{81}$$
$$y^2-8y+15=0$$
$$y_1=3$$
$$y_2=5$$
$$\sqrt[2x]{81}=3 \Rightarrow 3^{\frac{4}{2x}}=3 \Rightarrow x=2$$
$$\sqrt[2x]{81}=5 \Rightarrow 3^{\frac{4}{2x}}=5 \Rightarrow \text{nemá v } N-\{1\} \text{ řešení}$$
$$K=\{2\}$$

c)
$$2^x\cdot 2^{3(x-1)}+2^{1-x}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^x=1$$
$$2^{x+3x-3}+2^{1-x-2x}=1$$
$$2^{4x}\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{2^{4x}}=1$$
$$\text{sub.: } y=2^{4x}$$
$$\frac{1}{8}y+2\frac{1}{y}=1$$
$$y^2-8y+16=0$$
$$y=4$$
$$2^{4x}=4$$
$$4x=2$$
$$x=\frac{1}{2}$$
$$K=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

6. Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:
   a) $\log(4x+6)-\log(2x-1)=1$
   b) $\log(x+3)-\log 5=\log(x-3)-\log 2$
   c) $\log(x+1)+\log(x-1)-\log x=\log(x+2)$
   d) $2+\log 5x=\log(6x+7)+\log 25$
   e) $\log(2x+9)-2\log x+\log(x-4)=2-\log 50$
   f) $\log\left(x^2-1\right)-\log(x+1)=2$

Řešení:

a) $\log(4x+6)-\log(2x-1)=1$

$$\log\frac{4x+6}{2x-1}=1$$
$$4x+6=20x-10$$
$$16x=16$$
$$x=1$$

$Zk.:$

$L=\log(4+6)-\log(2-1)=1-0=1$

$P=1$

$L=P$

$K=\{1\}$

b) $\log(x+3)-\log 5=\log(x-3)-\log 2$

$$\log\frac{x+3}{5}=\log\frac{x-3}{2}$$
$$2x+6=5x-15$$
$$3x=21$$
$$x=7$$

Podm.: $x>3$

$K=\{7\}$

c) $\log(x+1)+\log(x-1)-\log x=\log(x+2)$

$$\log(x+1)(x-1)=\log x(x+2)$$
$$x^2-1=x^2+2x$$
$$2x=-1$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

Podm.: $x>1$

$K=\varnothing$

d) $2+\log 5x=\log(6x+7)+\log 25$

$$\log 100+\log 5x=\log 25(6x+7)$$
$$\log 500x=\log 25(6x+7)$$
$$20x=6x+7$$
$$14x=7$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Zk.:

$L=2+\log\frac{5}{2}=\log(100\cdot\frac{5}{2})=\log 250$

$P=\log(6\cdot\frac{1}{2}+7)+\log 25=\log 10+\log 25=\log 250$

$L=P$

$K=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

e) $\log(2x+9)-2\log x+\log(x-4)=2-\log 50$

$$\log\frac{(2x+9)(x-4)}{x^2}=\log\frac{100}{50}$$

$$2x^2+9x-8x-36=2x^2$$

$$x=36$$

Zk.:

$$L=\log 81-2\log 36+\log 32=\log\frac{81\cdot 32}{36^2}=\log 2$$

$$P=\log\frac{100}{50}=2$$

$$L=P$$

$$K=\{36\}$$

f) $\log(x^2-1)-\log(x+1)=2$

$$\log\frac{x^2-1}{x+1}=\log 100$$

$$x^2-1=100x+100$$

$$x^2-100x-101=0$$

$$x_1=-1$$

$$x_2=101$$

Zk.:

$$L=\log(101^2-1)-\log(101+1)=\log\frac{10200}{102}=\log 100=2$$

$$P=2$$

$$L=P$$

$x_1=-1\Rightarrow \log 0$ není definován $\Rightarrow$ nemá řešení

K=$\{101\}$

7. Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:

a) $\log\frac{2(3x-1)}{x-2}=1$

b) $\frac{\log x}{1-\log 2}=2$

c) $\frac{\log(x^2+7)}{\log(x+7)}=2$

d) $2\log 3x^2+3\log 4x^3=4\log 2x^2+4\log 6x$

e) $\frac{\log\frac{5}{3}(x-2)}{\log(x-2)}=2$

f) $\log\sqrt{x+4}-\log\sqrt{x-4}=\log 12-\log 4$

g) $\log\sqrt{x+1}+\log\sqrt{x-1}=2-\log 2$

Řešení:

a) $\log\frac{2(3x-1)}{x-2}=1$

$$\frac{2(3x-1)}{x-2}=10$$

$$6x-2=10x-20$$

$$4x=18$$

$$x=\frac{9}{2}$$

Zk.:

$$L=\log\frac{2\left(3\cdot\frac{9}{2}-1\right)}{\frac{9}{2}-2}=\log\frac{25}{\frac{5}{2}}=\log 10=1$$

$$P=1$$

$$L=P$$

$$K=\left\{\frac{9}{2}\right\}$$

b) $\frac{\log x}{1-\log 2}=2$

$$\log x=2-2\log 2$$

$$\log x=\log\frac{100}{4}$$

$$x=25$$

Podm.: $x>0$

$$\mathrm{K}=\{25\}$$

c) $\frac{\log\left(x^2+7\right)}{\log\left(x+7\right)}=2$

$$\log\left(x^2+7\right)=2\log\left(x+7\right)$$

$$x^2+7=\left(x+7\right)^2$$

$$x^2+7=x^2+14x+49$$

$$14x=-42$$

$$x=-3$$

Zk.:

$$L=\frac{\log\left(9+7\right)}{\log\left(-3+7\right)}=\frac{\log 16}{\log 4}=\log_4 16=2$$

$$P=2$$

$$L=P$$

d) $$2\log 3x^2 + 3\log 4x^3 = 4\log 2x^2 + 4\log 6x$$

$$\log 9 + 4\log x + \log 64 + 9\log x = \log 16 + 8\log x + \log 1296 + 4\log x$$

$$\log x = \log \frac{1296 \cdot 16}{64 \cdot 9}$$

$$x = 36$$

$$\text{Podm.}: x > 0$$

$$K = \{36\}$$

e) $$\frac{\log \frac{5}{3}(x-2)}{\log(x-2)} = 2$$

$$\log \frac{5}{3}(x-2) = \log(x-2)^2$$

$$5x - 10 = 3x^2 - 12x + 12$$

$$3x^2 - 17x + 22 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{11}{3}$$

Kořen $x_1 = 2$ nevyhovuje podmínce $x > 2$

$$K = \left\{\frac{11}{3}\right\}$$

f) $$\log\sqrt{x+4} - \log\sqrt{x-4} = \log 12 - \log 4$$

$$\log \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} = \log 3$$

$$\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} = 3$$

$$x + 4 = 9(x-4)$$

$$8x = 40$$

$$x = 5$$

Zk.:

$$L = \log\sqrt{5+4} - \log\sqrt{5-4} = \log 3$$

$$P = \log 3$$

$$L = P$$

$$K = \{5\}$$

g) $\log\sqrt{x+1}+\log\sqrt{x-1}=2-\log 2$

$$\log\sqrt{(x+1)(x-1)}=\log\frac{100}{2}$$

$$x^2-1=2500$$

$$x^2=2501$$

$$x=\pm\sqrt{2501}$$

Podmínce $x>1$ vyhovuje pouze kořen $x=+\sqrt{2501}$

$$K=\left\{\sqrt{2501}\right\}$$

8. Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:

a) $\dfrac{\log 2x}{\log\left(4x-15\right)}=2$

b) $\log\left(2x+10\right)=2\log\left(x+1\right)$

c) $\log\sqrt{3x-2}+\log\sqrt{4x-7}=\log 13$

d) $1+\log x^3=\dfrac{10}{\log x}$

e) $\log\left(x+1\right)+\log\left(x-1\right)-\log\left(x-2\right)=\log 8$

f) $\log x^3+\log x^4+\log x^5=24$

g) $\log x+\log\sqrt{x}-\log\dfrac{1}{x^{-2}}=4$

h) $\dfrac{3}{8}\log x^4+10\log\sqrt{x}-\log x^5=4\log x^{\frac{3}{4}}+1$

i) $\log\sqrt{x-5}-\log 3=\log\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

j) $\log\sqrt{2x-1}+\log\sqrt{x-9}=1$

k) $\dfrac{\log\left(54-x^3\right)}{\log x}=3$

Řešení:

a) $$\frac{\log 2x}{\log\left(4x-15\right)}=2$$

$$2x=\left(4x-15\right)^2$$

$$16x^2-122x+225=0$$

$$x_1=\frac{9}{2}$$

$$x_2=\frac{25}{8}\ \text{... nevyhovuje}$$

$$\text{Podm.}: x>\frac{15}{4}$$

$$K=\left\{\frac{9}{2}\right\}$$

b) $\log(2x+10) = 2\log(x+1)$

$$2x+10 = x^2+2x+2$$
$$x^2 = 8$$
$$x = \pm\sqrt{8}$$
$$\text{Podm.}: x > -1$$
$$K = \{\sqrt{8}\}$$

c) $\log\sqrt{3x-2} + \log\sqrt{4x-7} = \log 13$

$$\sqrt{(3x-2)(4x-7)} = 13$$
$$12x^2 - 8x - 21x + 14 = 169$$
$$12x^2 - 29x - 155 = 0$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -\frac{31}{12}$$
$$\text{Podm.}: x > \frac{7}{4}$$
$$K = \{5\}$$

d)

$$1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$$
$$1 + 3\log x = \frac{10}{\log x}$$
$$\text{sub.}: y = \log x$$
$$1 + 3y = \frac{10}{y}$$
$$3y^2 + y - 10 = 0$$
$$y_1 = -2$$
$$y_2 = \frac{5}{3}$$
$$\log x_1 = -2$$
$$x_1 = \frac{1}{100}$$
$$x_2 = 10^{\frac{5}{3}}$$
$$\text{Podm.}: x > 0 \wedge x \neq 1$$
$$K = \left\{\frac{1}{100}, 10^{\frac{5}{3}}\right\}$$

e) $\log(x+1)+\log(x-1)-\log(x-2)=\log 8$

$$\log(x+1)(x-1)=\log 8(x-2)$$
$$x^2-1=8x-16$$
$$x^2-8x+15=0$$
$$x_1=3$$
$$x_2=5$$
$$\text{Podm.}: x>2$$
$$K=\{3;5\}$$

f) $\log x^3+\log x^4+\log x^5=24$

$$3\log x+4\log x+5\log x=24$$
$$12\log x=24$$
$$\log x=2$$
$$x=100$$
$$\text{Podm.}: x>0$$
$$K=\{100\}$$

g) $\log x+\log\sqrt{x}-\log\frac{1}{x^{-2}}=4$

$$\log x+\frac{1}{2}\log x-2\log x=4$$
$$-\frac{1}{2}\log x=4$$
$$\log x=-8$$
$$x=10^{-8}$$
$$\text{Podm.}: x>0$$
$$K=\{10^{-8}\}$$

h) $\frac{3}{8}\log x^4+10\log\sqrt{x}-\log x^5=4\log x^{\frac{3}{4}}+1$

$$\frac{3}{2}\log x+5\log x-5\log x=3\log x+1$$
$$3\log x=6\log x+2$$
$$3\log x=-2$$
$$\log x=-\frac{2}{3}$$
$$x=10^{-\frac{2}{3}}$$
$$\text{Podm.}: x>0$$
$$K=\left\{10^{-\frac{2}{3}}\right\}$$

i)
$$\log\sqrt{x-5}-\log 3=\log\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$
$$\log\frac{\sqrt{x-5}}{3}=\log\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$
$$\frac{\sqrt{x-5}}{3}=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$
$$\sqrt{(x-5)(2x-3)}=3$$
$$2x^2-10x-3x+15=9$$
$$2x^2-13x+6=0$$
$$x_1=6$$
$$x_2=\frac{1}{2}$$
$$\text{Podm.}: x>5$$
$$K=\{6\}$$

j)
$$\log\sqrt{2x-1}+\log\sqrt{x-9}=1$$
$$\sqrt{(2x-1)(x-9)}=10$$
$$2x^2-x-18x+9-100=0$$
$$2x^2-19x-91=0$$
$$x_1=13$$
$$x_2=\frac{7}{2}$$
$$\text{Podm.}: x>9$$
$$K=\{13\}$$

k)
$$\frac{\log\left(54-x^3\right)}{\log x}=3$$
$$54-x^3=x^3$$
$$2x^3=54$$
$$x^3=27$$
$$x=3$$

Zk:
$$L=\frac{\log\left(54-3^3\right)}{\log 3}=\frac{\log 27}{\log 3}=\log_3 27=3$$
$$P=3$$
$$L=P$$
$$K=\{3\}$$

9. Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:

a) $\dfrac{2-\log x}{3+\log x}=0,25$

b) $\dfrac{\log_3(2x+13)}{\log_3(x+5)}=2$

c) $\dfrac{\log_7 7x}{\log_7(2x-7)}=2$

d) $\dfrac{\log_5\left[(x+1)^2(x+2)\right]}{\log_5(x+3)}=\log_5 125$

Řešení:

a) $$\frac{2-\log x}{3+\log x}=0,25$$

$$8-4\log x=3+\log x$$

$$5\log x=5$$

$$\log x=1$$

$$x=10$$

$$\text{Podm.}: x>0$$

$$K=\{10\}$$

b) $$\frac{\log_3(2x+13)}{\log_3(x+5)}=2$$

$$\log_3(2x+13)=\log_3(x+5)^2$$

$$2x+13=x^2+10x+25$$

$$x^2+8x+12=0$$

$$x_1=-2$$

$$x_2=-6$$

$$\text{Podm.}: x>-5$$

$$K=\{-2\}$$

c) $$\frac{\log_7 7x}{\log_7(2x-7)}=2$$

$$\log_7 7x=\log_7(2x-7)^2$$

$$7x=4x^2-28x+49$$

$$4x^2-35x+49=0$$

$$x_1=7$$

$$x_2=\frac{7}{4}$$

$$\text{Podm.}: x>\frac{7}{2}$$

$$K=\{7\}$$

d) $$\frac{\log_5\left[(x+1)^2(x+2)\right]}{\log_5(x+3)}=\log_5 125$$

$$\log_5\left[(x+1)^2(x+2)\right]=\log_5(x+3)^3$$

$$\left[(x+1)^2(x+2)\right]=(x+3)^3$$

$$\left(x^2+2x+1\right)(x+2)=x^3+9x^2+27x+27$$

$$x^3+2x^2+x+2x^2+4x+2=x^3+9x^2+27x+27$$

$$5x^2+22x+25=0$$

$$\text{Nemá řešení} \Rightarrow K=\emptyset$$

4.5. Exponenciální a logaritmické nerovnice

1. Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$:
   a) $2^x > 8$
   b) $16^{\frac{4}{x}} > \sqrt{4}$
   c) $100^{x^2-5x} > 0,01^4$
   d) $2^{x^2-1} < 4^4$
   e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\sqrt[3]{\frac{7}{3}}\right)^x$
   f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} < \left(\frac{1}{3}\right)^3$
   g) $3^{6x-1} - 9^{x+3} < 0$
   h) $4^{2x} > 3 \cdot 4^x + 4$
   i) $0 < 5^{x^2-x-6} \le 1$
   j) $\left(\frac{1}{8}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \le 2$
   k) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{|x|}{1-x}} \le 1$
   l) $|x|^{x^2-6x-7} < 1$

Řešení:

a)
$$2^x > 8$$
$$2^x > 2^3$$
funkce $y = 2^x$ je rostoucí $\Rightarrow x > 3$

$x \in (3;\infty)$

b)
$$16^{\frac{4}{x}} > \sqrt{4}$$
$$4^{\frac{8}{x}} > 4^{\frac{1}{2}}$$
funkce $y = 4^x$ je rostoucí $\Rightarrow \frac{8}{x} > \frac{1}{2}$

* $$\frac{8}{x} - \frac{1}{2} > 0$$
$$\frac{16-x}{2x} > 0$$
$$x_{01} = 16$$
$$x_{02} = 0$$

	$(-\infty;0)$	$(0;16)$	$(16;\infty)$
$16-x$	+	+	-
$2x$	-	+	+
	-	+	-

$x \in (0;16)$

c) $100^{x^2-5x} > 0,01^4$

$100^{x^2-5x} > 100^{-4}$

funkce $y = 100^x$ je rostoucí $\Rightarrow x^2 - 5x > -4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 4$

$x \in (-\infty;1) \cup (4;\infty)$

d) $2^{x^2-1} < 4^4$

$2^{x^2-1} < 2^8$

funkce je rostoucí $\Rightarrow x^2 - 1 < 8 \Rightarrow x^2 - 9 < 0$

$(x-3)(x+3) < 0$

$x \in (-3;3)$

e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\sqrt[3]{\frac{7}{3}}\right)^x$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{3}x}$

funkce $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ je klesající $\Rightarrow x^2 < -\frac{1}{3}x \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x < 0$

$x\left(x + \frac{1}{3}\right) < 0$

$x \in \left(-\frac{1}{3};0\right)$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot 3^{2x+5} < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$3^{-x^2} \cdot 3^{2x+5} < 3^{-3}$

$3^{-x^2+2x+5} < 3^{-3}$

funkce $y = 3^x$ je rostoucí $\Rightarrow -x^2 + 2x + 5 < -3 \Rightarrow -x^2 + 2x + 8 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 > 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = -2$

$x \in (-\infty;-2) \cup (4;\infty)$

g) $3^{6x-1} - 9^{x+3} < 0$

$3^{6x-1} < 3^{2x+6}$

$6x - 1 < 2x + 6$

$4x < 7$

$x < \frac{7}{4}$

$x \in \left(-\infty;\frac{7}{4}\right)$

h) $$4^{2x} > 3\cdot 4^{x} + 4$$

$$4^{2x} - 3\cdot 4^{x} - 4 > 0$$

$$\text{sub.}: y = 4^{x}$$

$$y^2 - 3y - 4 > 0$$

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 4$$

$$y \in (-\infty; -1) \cup (4; \infty)$$

$$4^{x} < -1 \ \text{ nemá řešení}$$

$$4^{x} > 4 \ \Rightarrow x > 1$$

$$x \in (1; \infty)$$

i) $$0 < 5^{x^2 - x - 6} \leq 1$$

$$0 < 5^{x^2 - x - 6} \ \text{ platí pro všechna } x \in R$$

$$5^{x^2 - x - 6} \leq 1$$

$$5^{x^2 - x - 6} \leq 5^{0}$$

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

$$x \in \langle -2; 3 \rangle$$

j) $$\underbrace{\left(\frac{1}{8}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \leq 2}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \leq 2$$

$$2^{-3} < 2^{-3x+1} \qquad 2^{-3x+1} \leq 2^{1}$$

$$-3 < -3x + 1 \qquad -3x + 1 \leq 1$$

$$3x < 4 \qquad -3x \leq 0$$

$$x < \frac{4}{3} \qquad x \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x < \frac{4}{3} \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \left\langle 0; \frac{4}{3} \right)$$

k) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{|x|}{1-x}} \leq 1$

$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{|x|}{1-x}} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{0}$

$\frac{|x|}{1-x} \geq 0$

$|x| \geq 0$ pro všechna $x \in R$

$1-x > 0 \Rightarrow x < 1$

$x \in (-\infty;1)$

l)

$$|x|^{x^2-6x-7} < 1$$

$$|x|^{x^2-6x-7} < |x|^0$$

$x \in (-1;1)$	$x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$
$x^2-6x-7>0$	$x^2-6x-7<0$
$(x+1)(x-7)>0$	$(x+1)(x-7)<0$
$x \in (-\infty;-1) \cup (7;\infty)$	$x \in (-1;7)$
$K = \emptyset$	$\left.\begin{array}{l} x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty) \\ x \in (-1;7) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (1;7)$

2. Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\log_3(x-2) > 2$

b) $\log_{0,5}(x^2-8) > \log_{0,5} 1$

c) $\log(x-4) + \log(x-2) > \log 8$

d) $\log\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| < 0$

e) $\log_{\frac{1}{7}} \log_3(x^2-6) > 0$

f) $\log_x 4 < 1$

g) $\log_{2x-3} x > 1$

h) $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x\right) < 1$

i) $\frac{1}{1-\log_2 x} > 1 - \frac{1}{\log_2 x}$

j) $\left(\frac{1}{8}\right)^{5x} > 1$

k) $5^{x^2-3x+2} < 5^{2x+x^2}$

l) $\log_{\frac{1}{3}} |x-2| < 2$

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+3x} \cdot 8^7 > \left(\frac{1}{8}\right)^3$

Řešení:

a) $\log_3(x-2) > 2$

$\log_3(x-2) > \log_3 9$

funkce $y = \log_3 x$ je rostoucí $\Rightarrow (x-2) > 9 \Rightarrow x > 11 \Rightarrow x \in (11;\infty)$

b) $\log_{0,5}\left(x^2-8\right)>\log_{0,5}1$

$$\text{funkce } y=\log_{0,5}x \text{ je klesající} \Rightarrow \left(x^2-8\right)<1 \Rightarrow x^2-9<0$$

$$(x-3)(x+3)<0$$

$$x\in(-3;3)$$

c) $\log(x-4)+\log(x-2)>\log 8$

$$\text{funkce } y=\log x \text{ je rostoucí} \Rightarrow (x-4)(x-2)>8$$

$$x^2-6x+8>8$$

$$x^2-6x>0$$

$$x(x-6)>0$$

$$x\in(-\infty;0)\cup(6;\infty)$$

$$\text{Podm.}:(x-4>0)\wedge(x-2)>0 \Rightarrow (x>4\wedge x>2) \Rightarrow x\in(4;\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} x\in(-\infty;0)\cup(6;\infty) \\ x\in(4;\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow x\in(6;\infty)$$

d) $\log\left|\dfrac{2x-4}{x+3}\right|<0$

$$\log\left|\frac{2x-4}{x+3}\right|<\log 1$$

$$\left|\frac{2x-4}{x+3}\right|<1$$

$$x_{01}=2$$

$$x_{02}=-3$$

	$(-\infty;-3)$	$(-3;2)$	$(2;\infty)$
$2x-4$	-	-	+
$x+3$	-	+	+
	+	-	+

$$I.\ x\in(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$$

$$\frac{2x-4}{x+3}<1$$

$$\frac{2x-4-x-3}{x+3}<0$$

$$\frac{x-7}{x+3}<0$$

$$x\in(-3;7)\wedge x\in(-\infty;-3)\cup(2;\infty) \Rightarrow x_I\in(2;7)$$

	$(-\infty;-3)$	$(-3;7)$	$(7;\infty)$
$x-7$	-	-	+
$x+3$	-	+	+
	+	-	+

$$II.\ x \in (-3;2)$$

$$-\frac{2x-4}{x+3} < 1$$

$$\frac{-2x+4-x-3}{x+3} < 0$$

$$\frac{-3x+1}{x+3} < 0$$

$$x \in (-\infty;-3) \cup \left(\frac{1}{3};\infty\right) \wedge x \in (-3;2) \Rightarrow x_{II} \in \left(\frac{1}{3};2\right)$$

	$(-\infty;-3)$	$\left(-3;\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3};\infty\right)$
$-3x+1$	+	+	-
$x+3$	-	+	+
	-	+	-

$$x \in \left(\frac{1}{3};2\right) \cup (2;7)$$

e)

$$\log_3\left(x^2-6\right) < 1$$

$$\log_3\left(x^2-6\right) < \log_3 3$$

$$x^2-6 < 3$$

$$x^2-9 < 0$$

$$(x-3)(x+3) < 0$$

$$x \in (-3;3)$$

$$\text{Podm.}: x^2-6 > 0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty;-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6};\infty\right)$$

$$\log\left(x^2-6\right) > 0$$

$$x^2-6 > 1$$

$$x^2-7 > 0$$

$$\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right) > 0$$

$$x \in \left(-\infty;-\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7};\infty\right)$$

$$\text{Závěr podmínek}: x \in \left(-\infty;-\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7};\infty\right)$$

$$\text{Závěr}: x \in \left(-3;-\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7};3\right)$$

f)

$$\overbrace{\log_x 4 < 1}$$

$I.\ x \in (0;1)$	$II.\ x \in (1;\infty)$
$\log_x 4 < 1$	$\log_x 4 < 1$
$\log_x 4 < \log_x x$	$\log_x 4 < \log_x x$
$4 > x$	$4 < x$
$x < 4$	$x > 4$
$x_I \in (0;1)$	$x_{II} \in (4;\infty)$

$$x \in (0;1) \cup (4;\infty)$$

g)

$$\log_{2x-3} x > 1 \begin{cases} I.\ 0 < 2x-3 < 1 \Rightarrow \emptyset \\ II.\ 2x-3 > 1 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \log_{2x-3} x > 1 \Rightarrow \log_{2x-3} x > \log_{2x-3}(2x-3) \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow x > 2x-3 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in (2;3) \end{cases}$$

h)

$$\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x\right) < 1$$

$1+\log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x > 0$	
$\dfrac{\log_9 x}{\log_9 \frac{1}{9}} - \log_9 x > -1$	$1-2\log_9 x < 2$
$-2\log_9 x > -1$	$-2\log_9 x < 1$
$\log_9 x < \dfrac{1}{2}$	$\log_9 x > -\dfrac{1}{2}$
$\log_9 x < \log_9 9^{\frac{1}{2}}$	$\log_9 x > \log_9 9^{-\frac{1}{2}}$
$x < 3$	$x > \dfrac{1}{3}$

$$x \in \left(\frac{1}{3};3\right)$$

i)
$$\frac{1}{1-\log_2 x} > 1 - \frac{1}{\log_2 x}$$
$$\text{sub.}: y = \log_2 x$$
$$\frac{1}{1-y} > 1 - \frac{1}{y}$$
$$\frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} - 1 > 0$$
$$\frac{y + 1 - y - y(1-y)}{y(1-y)} > 0$$
$$\frac{1 - y + y^2}{y(1-y)} > 0$$
$$1 - y + y^2 > 0 \text{ vždy}$$
$$y(1-y) > 0 \Rightarrow y \in (0;1) \Rightarrow 0 < \log_2 x < 1 \begin{Bmatrix} \log_2 x > 0 \Rightarrow x > 1 \\ \log_2 x < 1 \Rightarrow x < 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow x \in (1;2)$$
$$\text{Podm.}: x > 0 \wedge \log_2 x \neq 0 \wedge 1 - \log_2 x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2$$

j)
$$\left(\frac{1}{8}\right)^{5x} > 1$$
$$\left(\frac{1}{8}\right)^{5x} > \left(\frac{1}{8}\right)^{0}$$
$$\text{funkce } y = \left(\frac{1}{8}\right)^{x} \text{ je klesající} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0)$$

k)
$$5^{x^2-3x+2} < 5^{2x+x^2}$$
$$x^2 - 3x + 2 < 2x + x^2$$
$$-5x < -2$$
$$x > \frac{2}{5} \Rightarrow x \in \left(\frac{2}{5}; \infty\right)$$

l)
$$\log_{\frac{1}{3}} |x-2| < 2$$
$$\log_{\frac{1}{3}} |x-2| < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$|x-2| > \frac{1}{9} \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{17}{9}\right) \cup \left(\frac{19}{9}; \infty\right)$$
$$\text{podm.}: |x-2| > 0 \Rightarrow x \in R \setminus \{2\}$$

m) $$\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+3x}\cdot 8^7>\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+3x}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-7}>\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+3x-7}>\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

$$x^2+3x-7<3$$

$$x^2+3x-10<0$$

$$x_1=2$$

$$x_2=-5$$

$$x\in(-5;2)$$