Posloupnosti a řady

Obsah

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

12. Posloupnosti

13.1 Úvod do posloupností

1. Posloupnost je dána vzorcem pro n-tý člen. Napište prvních pět členů dané posloupnosti a načrtněte graf.
   a) $a_n = 2n - 3$
   b) $a_n = n(n-2)$
   c) $a_n = n - 2^n$
   d) $a_n = n(-1)^{n+1}$

Řešení:

a) $a_n = 2n - 3$

Vypočítáme prvních pět členů posloupnosti pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$

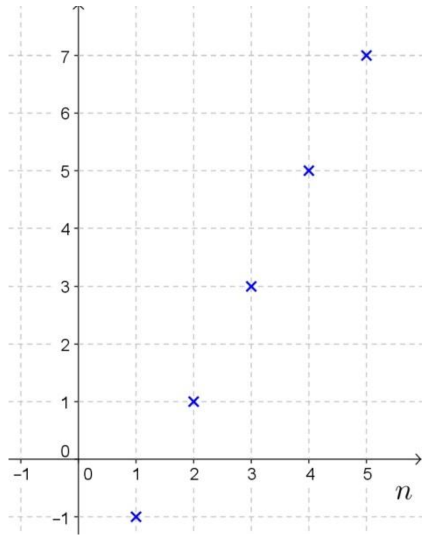
$a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

$a_3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

$a_4 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$

$a_5 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$



b) $a_n = n(n-2)$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$

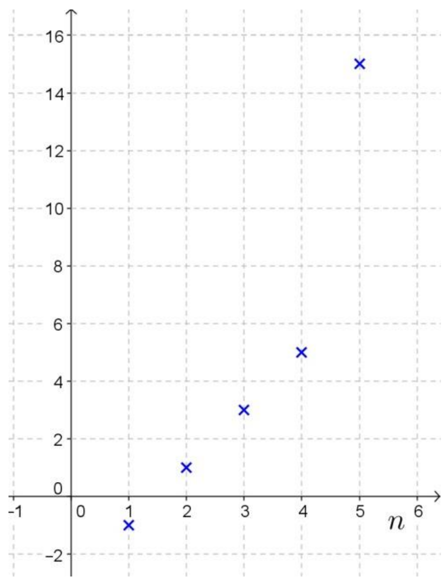
$a_1 = 1 \cdot (1-2) = -1$

$a_2 = 2 \cdot (2-2) = 0$

$a_3 = 3 \cdot (3-2) = 3$

$a_4 = 4 \cdot (4-2) = 8$

$a_5 = 5 \cdot (5-2) = 15$



c) $a_n = n - 2^n$

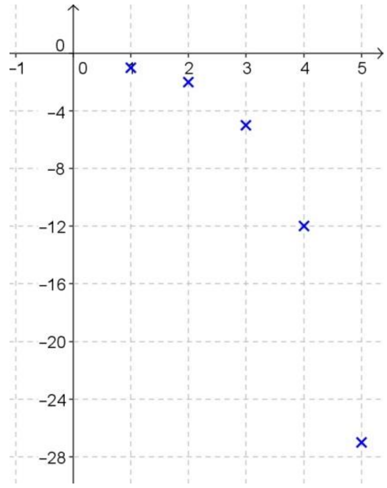
$a_1 = 1 - 2^1 = -1$

$a_2 = 2 - 2^2 = -2$

$a_3 = 3 - 2^3 = -5$

$a_4 = 4 - 2^4 = -12$

$a_5 = 5 - 2^5 = -27$



d) $a_n = n(-1)^{n+1}$

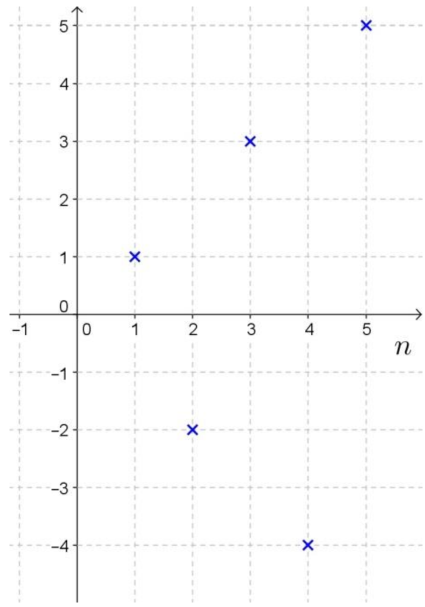
$a_1 = 1(-1)^{1+1} = 1$

$a_2 = 2(-1)^{2+1} = -2$

$a_3 = 3(-1)^{3+1} = 3$

$a_4 = 4(-1)^{4+1} = -4$

$a_5 = 5(-1)^{5+1} = 5$



2. Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních 5 členů dané posloupnosti.
   a) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + n - 1$
   b) $a_1 = -1, a_{n+1} = (-1)^{n-1} \cdot 2n - 1$

Řešení:

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + n - 1$

Vypočítáme prvních 5 členů dané posloupnosti pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$

$a_1 = 2$

$a_{1+1} = 2a_1 + 1 - 1 = 4$

$a_{2+1} = 2a_2 + 2 - 1 = 9$

$a_{3+1} = 2a_3 + 3 - 1 = 20$

$a_{4+1} = 2a_4 + 4 - 1 = 43$

b) $a_1 = -1, a_{n+1} = (-1)^{n-1} \cdot 2n - 1$

Vypočítáme prvních 5 členů dané posloupnosti pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$

$a_1 = -1$

$a_{1+1} = (-1)^{1-1} \cdot 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$a_{2+1} = (-1)^{2-1} \cdot 2 \cdot 2 - 1 = -5$

$a_{3+1} = (-1)^{3-1} \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_{4+1} = (-1)^{4-1} \cdot 2 \cdot 4 - 1 = -9$

$a_{5+1} = (-1)^{5-1} \cdot 2 \cdot 5 - 1 = 9$

3. Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních 6 členů dané posloupnosti.
   a) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$
   b) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_2$

Řešení:

a) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$

Vypočítáme prvních 6 členů dané posloupnosti pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$a_1 = 2$

$a_2 = 3$

$a_3 = 2a_{3-1} - 3a_{3-2} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$

$a_4 = 2a_{4-1} - 3a_{4-2} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = -9$

$a_5 = 2a_{5-1} - 3a_{5-2} = 2 \cdot (-9) - 3 \cdot 0 = -18$

$a_6 = 2a_{5-1} - 3a_{5-2} = 2 \cdot (-18) - 3 \cdot (-9) = -9$

b) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_2$

Vypočítáme prvních 6 členů dané posloupnosti pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$a_1 = 2$

$a_2 = 3$

$a_{1+2} = 3a_{1+1} + a_1 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

$a_{2+2} = 3a_{2+1} + a_2 = 3 \cdot 11 + 3 = 36$

$a_{3+2} = 3a_{3+1} + a_3 = 3 \cdot 36 + 11 = 119$

$a_{4+2} = 3a_{4+1} + a_4 = 3 \cdot 119 + 36 = 393$

4. Rozhodněte, zda je daná posloupnost rostoucí, klesající, případně ani rostoucí ani klesající. Zakreslete graf posloupnosti pro prvních 6 členů.
   a) $\left(n^2 + 5n - 5\right)_{n=1}^{\infty}$
   b) $\left(\log 10^{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$
   c) $\left((-1)^{n+1} \cdot 2n\right)_{n=1}^{\infty}$
   d) $\left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$
   e) $\left(n \cdot 2^n - 5n\right)_{n=1}^{\infty}$
   f) $\left(\dfrac{2-n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $\left(n^2+5n-5\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme prvních 6 členů této posloupnosti

$a_1=\left(1^2+5\cdot 1-5\right)=1$

$a_2=\left(2^2+5\cdot 2-5\right)=9$

$a_3=\left(3^2+5\cdot 3-5\right)=19$

$a_4=\left(4^2+5\cdot 4-5\right)=31$

$a_5=\left(5^2+5\cdot 5-5\right)=45$

$a_6=\left(6^2+5\cdot 6-5\right)=61$

Z prvních šesti členů posloupnosti je patrné, že by se mohlo jednat o posloupnost rostoucí. Dokážeme, že:

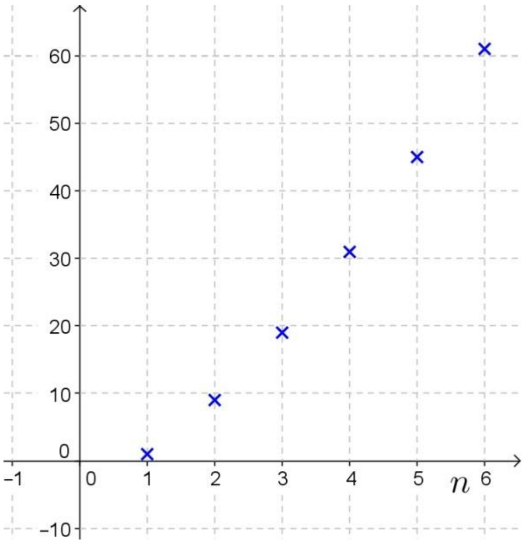
$\forall n\in N: n<n+1 \Rightarrow a_n<a_{n+1}$

$\forall n\in N: \left(n^2+5n-5\right)<\left(\left(n+1\right)^2+5\left(n+1\right)-5\right)$

$\left(n^2+5n-5\right)<\left(n^2+2n+2+5n+5-5\right)$

$\left(n^2+5n-5\right)<\left(n^2+7n+2\right)$

Z posledního řádku je nerovnost zřejmá. Bylo tedy dokázáno, že tato posloupnost je rostoucí.



b) $\left(\log 10^{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme prvních 6 členů této posloupnosti.

$a_1 = \log 10^{-1} = -1$

$a_2 = \log 10^{-2} = -2$

$a_3 = \log 10^{-3} = -3$

$a_4 = \log 10^{-4} = -4$

$a_5 = \log 10^{-5} = -5$

$a_6 = \log 10^{-6} = -6$

Z prvních šesti členů posloupnosti je patrné, že by se mohlo jednat o posloupnost klesající. Dokážeme, že:

$\forall n \in N : n < n+1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

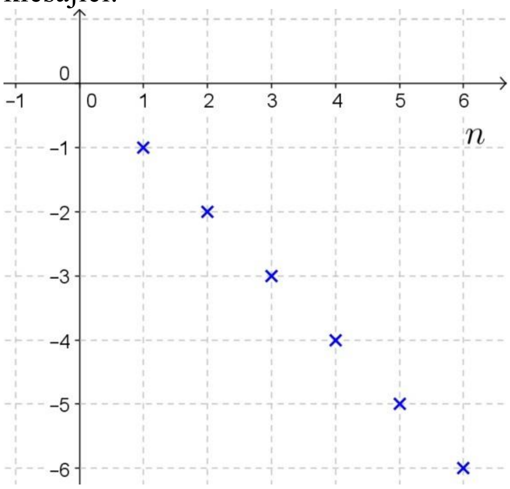
$\forall n \in N : n < n > 1 \Rightarrow \log 10^{-n} > \log 10^{-(n+1)}$

$-n \log 10 > -(n+1) \log 10$

$-n > -(n+1)$

$-v < n+1$

Z posledního řádku je nerovnost zřejmá. Bylo tedy dokázáno, že tato posloupnost je klesající.



c) $\left((-1)^{n+1}\cdot 2n\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme prvních 6 členů této posloupnosti.

$a_1 = \left((-1)^{1+1}\cdot 2\cdot 1\right) = 2$

$a_2 = \left((-1)^{2+1}\cdot 2\cdot 2\right) = -4$

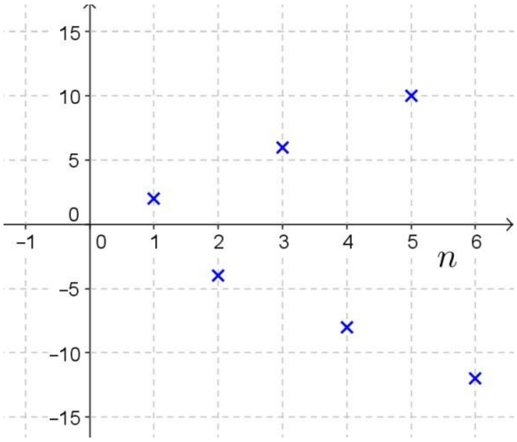
$a_3 = \left((-1)^{3+1}\cdot 2\cdot 3\right) = 6$

$a_4 = \left((-1)^{4+1}\cdot 2\cdot 4\right) = -8$

$a_5 = \left((-1)^{5+1}\cdot 2\cdot 5\right) = 10$

$a_6 = \left((-1)^{1+1}\cdot 2\cdot 1\right) = -12$

Vzhledem k oscilaci hodnot je zřejmé, že se jedná o posloupnost, která není ani rostoucí ani klesající. Tato situace je způsobena střídající se lichou a sudou mocninou čísla -1.



d) $\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme prvních 6 členů této posloupnosti.

$a_1 = \frac{1+2}{3\cdot 1-1} = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{2+2}{3\cdot 2-1} = \frac{4}{5}$

$a_3 = \frac{3+2}{3\cdot 3-1} = \frac{5}{7}$

$a_4 = \frac{4+2}{3\cdot 4-1} = \frac{6}{11}$

$a_5 = \frac{5+2}{3\cdot 5-1} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

$a_6 = \frac{6+2}{3\cdot 6-1} = \frac{8}{17}$

Z prvních šesti členů posloupnosti je patrné, že by se mohlo jednat o posloupnost klesající. Dokážeme, že:

$\forall n \in N : n < n+1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

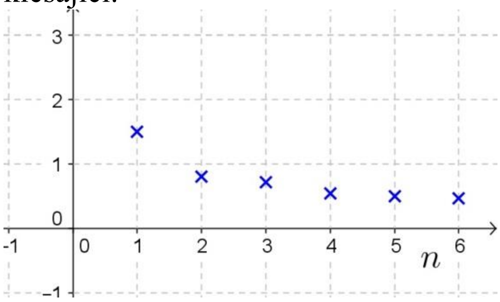
$\forall n \in N : n < n+1 \Rightarrow \frac{n+2}{3n-1} > \frac{(n+1)+2}{3(n+1)-1}$

$\frac{n+2}{3n-1} > \frac{(n+1)+2}{3n+2} \, / \, (3n-1)(3n+2)$

$(n+2)(3n+2) > (n+3)(3n-1)$

$3n^2 + 8n + 4 > 3n^2 + 8n - 3$

Z posledního řádku je nerovnost zřejmá. Bylo tedy dokázáno, že tato posloupnost je klesající.



e) $\left(n \cdot 2^n - 5n\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme prvních 6 členů této posloupnosti.

$a_1 = 1 \cdot 2^1 - 5 \cdot 1 = -3$

$a_2 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = -2$

$a_3 = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 3 = 9$

$a_4 = 4 \cdot 2^4 - 5 \cdot 4 = 44$

$a_5 = 5 \cdot 2^5 - 5 \cdot 5 = 135$

$a_6 = 6 \cdot 2^6 - 5 \cdot 6 = 354$

Z prvních šesti členů posloupnosti je patrné, že by se mohlo jednat o posloupnost rostoucí. Dokážeme, že:

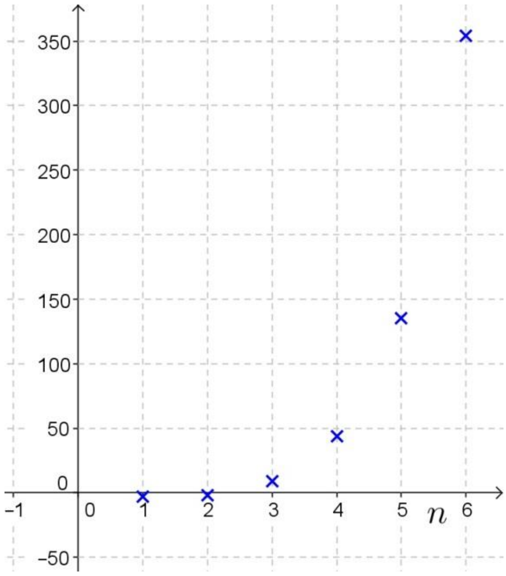
$\forall n \in N : n < n+1 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$

$\forall n \in N : n < n+1 \Rightarrow n \cdot 2^n - 5n < (n+1) \cdot 2^{n+1} - 5(n+1)$

$n \cdot 2^n - (n+1) \cdot 2^{n+1} < 5n - 5(n+1)$

$n^2 (n - 2n - 2) < 5$

Z posledního řádku je nerovnost zřejmá. Bylo tedy dokázáno, že tato posloupnost je rostoucí.



f) $\left(\dfrac{2-n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme prvních 6 členů této posloupnosti.

$a_1 = \dfrac{2-1}{1^2} = 1$

$a_2 = \dfrac{2-2}{2^2} = 0$

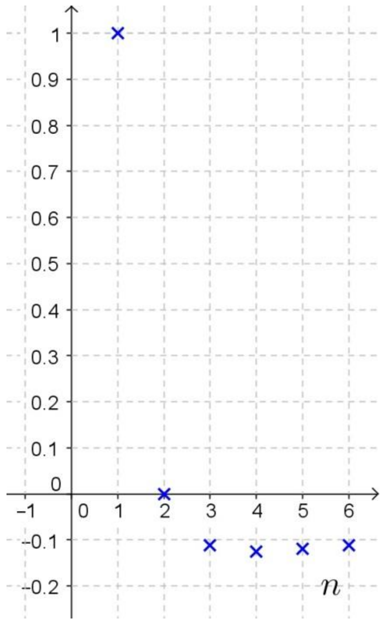
$a_3 = \dfrac{2-3}{3^2} = \dfrac{-1}{9}$

$a_4 = \dfrac{2-4}{4^2} = \dfrac{-2}{16} = -\dfrac{1}{8}$

$a_5 = \dfrac{2-5}{5^2} = -\dfrac{3}{25}$

$a_6 = \dfrac{2-6}{6^2} = -\dfrac{1}{9}$

Z hodnot prvních šesti členů této posloupnosti je patrné, že je posloupnost pro $n = 1$, 2, 3, 4 klesající. Hodnoty dalších členů posloupnosti (pro $n > 4$) jsou pro každé další n větší, a proto je tato posloupnost pro $n > 4$ rostoucí. Je tedy zřejmé, že tato posloupnost není rostoucí ani klesající pro $\forall\, n \in N$.



5. Rozhodněte, zda je posloupnost omezená shora, zdola nebo zda je omezená.

a) $\left(n+2\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(n^3-10\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\cos 10n\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(-\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

e) $\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

f) $\left(n^2+2n+2\right)_{n=1}^{\infty}$

g) $\left((-1)^n-(-1)^{n+1}\cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

h) $\left(\operatorname{tg} n\right)_{n=1}^{\infty}$

i) $\left(\frac{1-n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

j) $\left(\frac{e^n(n-1)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

k) $\left(\frac{\ln n}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $\left(n+2\right)_{n=1}^{\infty}$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená (shora omezená, zdola omezená), jestliže je množina všech jejích členů omezená (shora omezená, zdola omezená), tedy jestliže existuje takové

$K\in R:|a_n|\le K\ \left(a_n\le K, a_n\ge K\right), \forall n\in N$

Z hodnot prvních členů posloupnosti

$a_1=3$

$a_2=4$

$a_3=5$

$a_4=6$

$a_5=7$

$a_6=8$

je zřejmé, že je tato posloupnost zdola omezená. Existuje totiž $K=3: a_n\ge 3, \forall n\in N$.

b) $\left(n^3-10\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot prvních členů posloupnosti

$a_1=1^3-10=-9$

$a_2=2^3-10=-2$

$a_3=3^3-10=17$

$a_4=4^3-10=54$

$a_5=5^3-10=115$

$a_6=6^3-10=206$

vidíme, že je posloupnost zdola omezená. $\exists K=-9\in R: a_n\geq 3, \forall n\in N$.

c) $\left(\cos 10n\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot prvních členů posloupnosti

$a_1=\cos 10=0,98$

$a_2=\cos 20=0,94$

$a_3=\cos 30=0,87$

$a_4=\cos 40=0,77$

$a_5=\cos 50=0,64$

$a_6=\cos 10=0,5...$

$a_{17}=\cos 170=-0,99$

$a_{18}=\cos 180=-1$

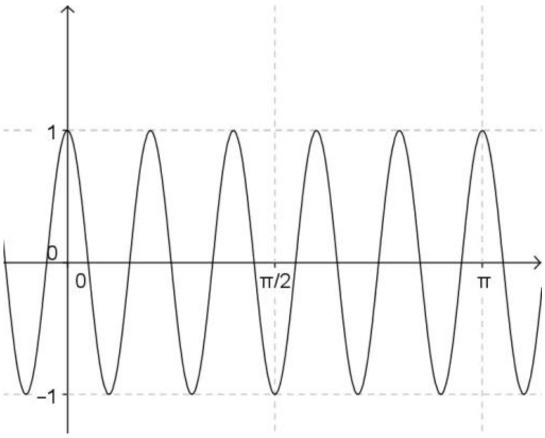
$a_{19}=\cos 190=-0,77$

$a_{20}=\cos 200=-0,94$

$a_{21}=\cos 210=-0,87$

$a_{22}=\cos 220=-0,77$

Z výčtu vybraných hodnot posloupnosti můžeme usuzovat na posloupnost omezenou. Také z grafu funkce $f\left(x\right)=\cos 10x$.



je vidět, že se jedná o funkci omezenou a to čísly $K=\pm 1$. Jelikož posloupnosti jsou vlastně funkce definované na množině přirozených čísel, lze říct, že jsme nalezli takové $K=1\in R: |a_n|\leq 1$. Posloupnost je tedy omezená.

d) $\left(-\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot prvních členů posloupnosti

$a_1 = -\frac{1}{1} = -1$

$a_2 = -\frac{1}{4}$

$a_3 = -\frac{1}{9}$

$a_4 = -\frac{1}{16}$

$a_5 = -\frac{1}{25}$

$a_6 = -\frac{1}{36}$

je zřejmé, že se jedná o posloupnost rostoucí, jejíž první člen dosahuje nejmenší hodnoty a to -1. Posloupnost je tedy omezená zdola hodnotou -1 a shora hodnotou 0, ke které se jednotlivé hodnoty členů posloupnosti blíží. Platí tedy:

$\forall n \in N{:}\ -1 \leq a_n < 0$

a posloupnost je tedy omezená.

e) $\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot prvních členů posloupnosti pro $\forall n \in N, n \neq 1$

$a_2 = \frac{2 \cdot 2+1}{2-1} = 5$

$a_3 = \frac{2 \cdot 3+1}{3-1} = \frac{7}{2}$

$a_4 = \frac{2 \cdot 4+1}{4-1} = \frac{9}{3}$

$a_5 = \frac{2 \cdot 5+1}{5-1} = \frac{11}{4}$

$a_6 = \frac{2 \cdot 6+1}{6-1} = \frac{13}{5}$

je vidět, že zadaná posloupnost je shora omezená hodnotou $K_1 = 5$. Hodnoty členů posloupnosti se pro $\forall n \in N, n \neq 1$ blíží hodnotě 2. Je tedy zřejmé, že posloupnost $\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, a platí:

$\forall n \in N, n \neq 1{:}\ 2 < a_n \leq 5$.

f) $\left(n^2+2n+2\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot prvních členů posloupnosti pro $\forall n \in N$:

$a_1 = 1^2 + 2\cdot 1 + 2 = 5$

$a_2 = 2^2 + 2\cdot 2 + 2 = 10$

$a_3 = 3^2 + 2\cdot 3 + 2 = 17$

$a_4 = 4^2 + 2\cdot 4 + 2 = 26$

$a_5 = 5^2 + 2\cdot 5 + 2 = 37$

$a_6 = 6^2 + 2\cdot 6 + 2 = 50$

je zřejmé, že se jedná o posloupnost rostoucí. Nejmenší hodnotu dosahuje tato posloupnost pro $n = 1$. Posloupnost je tedy omezená zdola hodnotou $K = 5$. Platí tedy:

$\forall n \in N: a_n \geq 5$.

g) $\left((-1)^n - (-1)^{n+1}\cdot n\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot několika členů posloupnosti

$a_1 = (-1)^1 - (-1)^{1+1}\cdot 1 = -2$

$a_2 = (-1)^2 - (-1)^{2+1}\cdot 2 = 3$

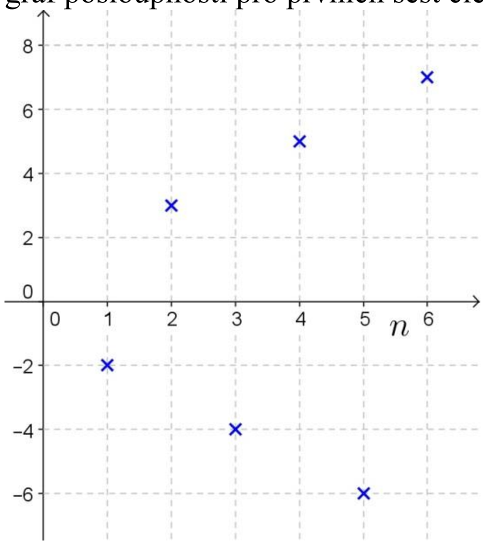
$a_3 = (-1)^3 - (-1)^{3+1}\cdot 3 = -4$

$a_4 = (-1)^4 - (-1)^{4+1}\cdot 4 = 5$

$a_5 = (-1)^5 - (-1)^{5+1}\cdot 5 = -6$

$a_6 = (-1)^6 - (-1)^{6+1}\cdot 6 = 7$

je zřejmé, že tato posloupnost není omezená ani shora ani zdola. Pro lichá n hodnoty členů posloupnosti klesají, pro sudé hodnoty n pak hodnoty členů posloupnosti rostou. Posloupnost $((-1)^n - (-1)^{n+1}n)_{n=1}^{\infty}$ není omezená. Pro ilustraci uveďme graf posloupnosti pro prvních šest členů.



h) $\left(\operatorname{tg} n\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot několika členů posloupnosti

$a_1 = 0{,}018$

$a_2 = 0{,}035$

$a_3 = 0{,}052$

$a_4 = 0{,}070$

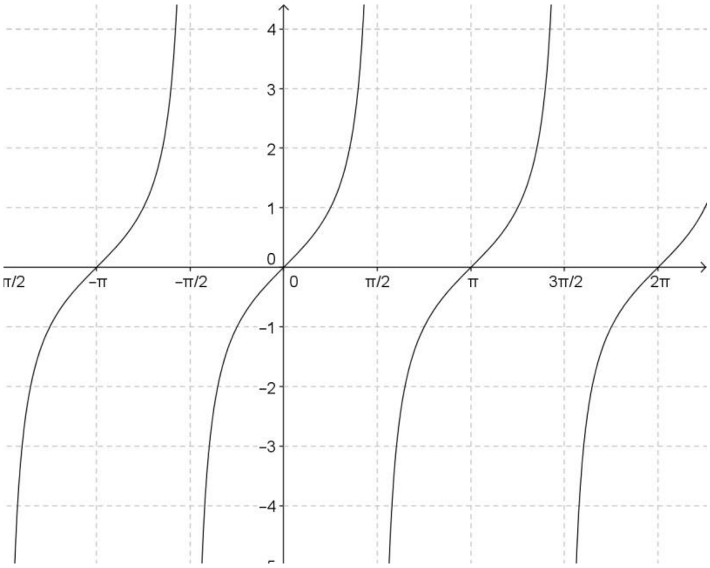
$a_5 = 0{,}088$

$a_6 = 0{,}105$

ze zřejmé, že se jedná o posloupnost rostoucí a zdola omezenou hodnotou prvního členu posloupnosti. Posloupnost je tedy omezená zdola hodnotou $K = 0{,}018$. Platí tedy:

$\forall n \in N: a_n \geq 0{,}018.$

Pro ilustraci si uveďme graf funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$



i) $\left(\dfrac{1-n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot několika členů posloupnosti

$a_1 = \dfrac{0}{1} = 0$

$a_2 = -\dfrac{1}{2}$

$a_3 = -\dfrac{2}{3}$

$a_4 = -\dfrac{3}{4}$

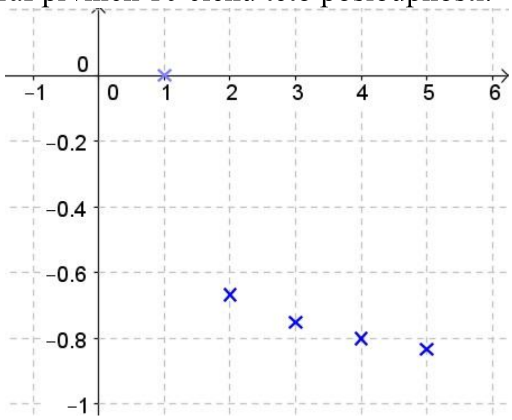
$a_5 = -\dfrac{4}{5}$

$a_6 = -\dfrac{5}{6}$

je zřejmé, že nejmenší hodnota, kterou tato posloupnost nabývá je 0, a to pro první člen posloupnosti. Posloupnost je tedy omezená shora, neboť je klesající. Při sledování hodnot členů posloupnosti zjišťujeme, že se blíží limitní hodnotě -1. Posloupnost je tedy omezená a platí:

$\forall n \in N\colon -1 < a_n \leq 0.$

Pro ilustraci ukažme graf prvních 10 členů této posloupnosti.



j) $\left(\dfrac{e^n(n-1)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Z hodnot několika členů posloupnosti

$$a_1 = \frac{e^1(1-1)}{1} = 0$$

$$a_2 = \frac{e^2(2-1)}{2} = \frac{e^2}{2}$$

$$a_3 = \frac{e^3(3-1)}{3} = \frac{2e^3}{3}$$

$$a_4 = \frac{e^4(4-1)}{4} = \frac{3e^4}{4}$$

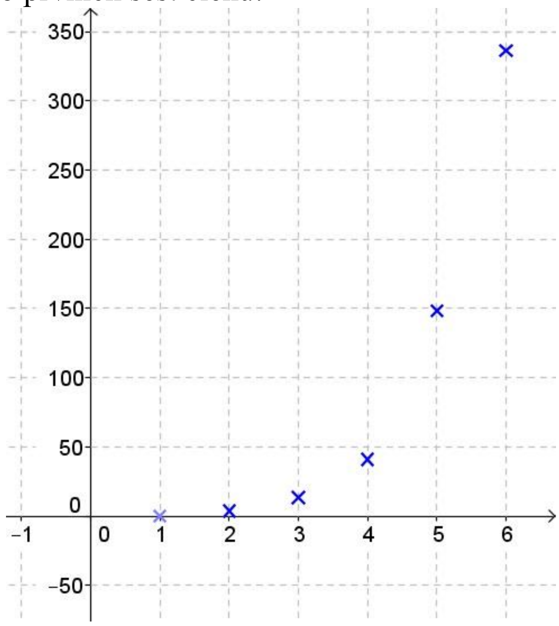
$$a_5 = \frac{e^5(5-1)}{5} = \frac{4e^5}{5}$$

$$a_6 = \frac{e^6(6-1)}{6} = \frac{5e^6}{6}$$

je zřejmé, že jde o posloupnost rostoucí. Nejmenší hodnotu dosahuje tato posloupnost pro $n = 1$, $a_1 = 0$. Z dalších hodnot členů posloupnosti je vidět, že tato posloupnost není shora omezená. Jde tedy o posloupnost zdola omezenou hodnotou $K = 0$ a platí:

$\forall n \in N\colon a_n \geq 0.$

Graf posloupnosti pro prvních šest členů:



k) $\left(\dfrac{\ln n}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypočítáme nejdříve pár členů posloupnosti:

$$a_1 = \frac{\ln 1}{(1+3)} = \frac{\ln 1}{4}$$

$$a_2 = \frac{\ln 2}{5}$$

$$a_3 = \frac{\ln 4}{6}$$

$$a_4 = \frac{\ln 4}{7}$$

$$a_5 = \frac{\ln 5}{8}$$

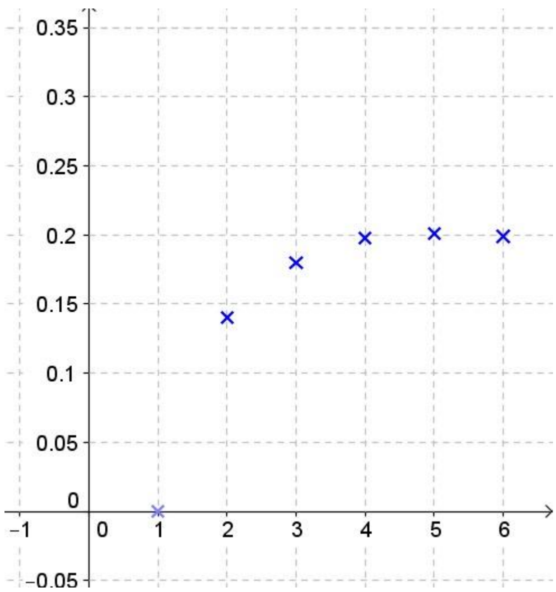
$$a_6 = \frac{\ln 6}{9}$$

po výpočtu a zaokrouhlení:

$a_1 = 0,\ a_2 = 0{,}14,\ a_3 = 0{,}18,\ a_4 = 0{,}198,\ a_5 = 0{,}201,\ \mathrm{a}_6 = 0{,}199$

Z uvedených hodnot vyplývá, že posloupnost dosahuje své minimální hodnoty pro $n = 1$ a to $a_1 = 0$. Dále hodnoty členů posloupnosti rostou. Maximální hodnotu dosahuje tato posloupnost pro $n = 5$ a to $a_1 = 0{,}201$. Dále členy posloupnosti klesají a limitně se blíží hodnotě 0. Je tedy zřejmé, že je tato posloupnost omezená a platí:

$\forall n \in N\colon 0 \le a_n \le \frac{\ln 5}{8}$.



6. Vypočítejte limitu posloupnosti, určete další vlastnosti, a rozhodněte, zda je daná posloupnost konvergentní.

a) $\left(\frac{10}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $(5)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\frac{6n-2}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left((-1)^n \cdot \frac{2}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $\left(\frac{10}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypočítáme několik hodnot členů posloupnosti

$$a_1 = \frac{10}{1} = 10$$

$$a_2 = \frac{10}{2} = 5$$

$$a_3 = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$a_5 = \frac{10}{5} = 2$$

$$a_6 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Z prvních šesti členů posloupnosti je zřejmé, že se jedná o posloupnost klesající, neboť $\forall\, n \in N: n < n + 1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$. Posloupnost je shora omezená hodnotou prvního členu posloupnosti tedy pro $n = 1$ a to hodnotou $a_1 = 10$. Určíme limitu posloupnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10}{n}}{\frac{n}{n}} = \frac{0}{1} = 0$.

Z hodnoty limity posloupnosti je zřejmé, že se hodnoty členů posloupnosti budou pro
$n \to \infty$ blížit hodnotě 0. Posloupnost je tedy omezená a konvergentní s limitou 0.

b) $(5)_{n=1}^{\infty}$

Ze zadání příkladu, je zřejmé, že pro $\forall\, n \in N$ budou všechny hodnoty členů posloupnosti stejné a to $a_n = 5$. Jedná se tedy o posloupnost konstantní. Tato posloupnost je jistě konvergentní, neboť: $\lim_{n\to\infty} 5 = 5$

Jelikož je každá konvergentní posloupnost omezená, můžeme říct, že se tedy jedná o posloupnost omezenou.

c) $\left(\frac{6n-2}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si určíme hodnoty několika prvních členů posloupnosti:

$a_1 = \frac{6\cdot 1-2}{1+2} = \frac{4}{3}$

$a_2 = \frac{6\cdot 2-2}{2+2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$a_3 = \frac{6\cdot 3-2}{3+2} = \frac{16}{5}$

$a_4 = \frac{6\cdot 4-2}{4+2} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$

$a_5 = \frac{6\cdot 5-2}{5+2} = \frac{28}{7} = 4$

$a_6 = \frac{6\cdot 6-2}{6+2} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$

Z těchto hodnot je zřejmé, že jde o posloupnost rostoucí. Zdá se, že se hodnoty členů posloupnosti blíží k jisté hodnotě. Vypočítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n-2}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6n}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \frac{6-0}{1+0} = 6$$

Existuje tedy vlastní limita, ke které se hodnoty členů posloupnosti blíží. Posloupnost je konvergentní a tedy i omezená (zdola hodnotou $\frac{4}{3}$, tedy hodnotou prvního členu posloupnosti, shora hodnotou limity posloupnosti, tedy hodnotou 6).

d) $\left((-1)^n \cdot \frac{2}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si určíme hodnoty několika prvních členů posloupnosti:

$a_1 = (-1)^1 \cdot \frac{2}{3\cdot 1} = -\frac{2}{3}$

$a_2 = (-1)^2 \cdot \frac{2}{3\cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$a_3 = (-1)^3 \cdot \frac{2}{3\cdot 3} = -\frac{2}{9}$

$a_4 = (-1)^4 \cdot \frac{2}{3\cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$a_5 = (-1)^5 \cdot \frac{2}{3\cdot 5} = -\frac{2}{15}$

$a_6 = (-1)^6 \cdot \frac{2}{3\cdot 6} = \frac{1}{9}$

U jednotlivých hodnot členů posloupnosti dochází ke střídání znamének, vzhledem ke střídajícím se sudým a lichým mocninám čísla (-1). Jedná se tedy o posloupnost alternující.

Alternující posloupností rozumíme libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kterou lze zapsat jako $a_n = (-1)^n b_n$, kde $b_n = R_0^+$.

Posloupnost je shora i zdola omezená a to hodnotou prvního členu $a_1 = -\frac{2}{3}$, respektive druhého členu $a_2 = \frac{1}{3}$. Pro výpočet limity posloupnosti si zjednodušíme situaci tak, že budeme předpokládat, že všechna znaménka hodnot členů posloupnosti jsou kladná. Tedy počítáme limitu posloupnosti $\left(\frac{2}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{3n}{n}} = \frac{0}{3} = 0$$

Posloupnost je tedy alternující, konvergentní a omezená.

7. Rozhodněte, zda je posloupnost aritmetická nebo geometrická. V případě aritmetické posloupnosti určete diferenci, v případě geometrické posloupnosti určete kvocient.

a) $\left(\frac{n+5}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\frac{n^2-n-6}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $(3-2n)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(\frac{3^n}{2^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$

e) $\left(\log 2^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

f) $\left(\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

g) $\left(\sqrt{10^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $\left(\dfrac{n+5}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si vypočítáme několik hodnot prvních členů posloupnosti

$a_1=\dfrac{1+5}{2}=3$

$a_2=\dfrac{2+5}{2}=\dfrac{7}{2},$

$a_3=\dfrac{3+5}{2}=\dfrac{8}{2}=4,$

$a_4=\dfrac{4+5}{2}=\dfrac{9}{2}$

$a_5=\dfrac{5+5}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

$a_6=\dfrac{6+5}{2}=\dfrac{11}{2},$

$a_7=\dfrac{7+5}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

Je zřejmé, že hodnota následujícího členu je vždy o $\dfrac{1}{2}$ větší než hodnota členu předcházejícího. Jedná se tedy zřejmě o aritmetickou posloupnost s diferencí $d=\dfrac{1}{2}$, neboť:

$$d=a_{n+1}-a_n=\frac{n+1+5}{2}-\frac{n+5}{2}=\frac{n+6}{2}-\frac{n+5}{2}=\frac{n+6-(n+5)}{2}=\frac{1}{2}.$$

b) $\left(\dfrac{n^2-n-6}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si vypočítáme několik hodnot prvních členů posloupnosti:

$a_1=\dfrac{1-1-6}{1+2}=-\dfrac{6}{3}=-2,$

$a_2=\dfrac{4-2-6}{2+2}=-1,$

$a_3=\dfrac{9-3-6}{3+2}=0,$

$a_4=\dfrac{16-4-6}{4+2}=1$

$a_5=\dfrac{25-5-6}{5+2}=2,$

$a_6=\dfrac{36-6-6}{6+2}=3,$

$a_7=\dfrac{49-7-6}{7+2}=4,$

$a_8=\dfrac{64-8-6}{8+2}=5$

Je zřejmé, že hodnota následujícího členu je vždy o 1 větší než hodnota členu předcházejícího. Jedná se tedy zřejmě o aritmetickou posloupnost s diferencí $d=1$, neboť:

$$d=a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2-(n+1)-6}{n+1+2}-\frac{n^2-n-6}{n+2}=\frac{n^2+2n+1-n-1-6}{n+3}-\frac{n^2-n-6}{n+2}=$$

$$=\frac{n^2+n-6}{n+3}-\frac{n^2-n-6}{n+2}=\frac{(n+2)(n^2+n-6)-(n+3)(n^2-n-6)}{(n+3)(n+2)}=$$

$$=\frac{n^3+n^2-6n+2n^2+2n-12-(n^3-n^2-6n+3n^2-3n-18)}{(n+3)(n+2)}=$$

$$=\frac{n^3+n^2-6n+2n^2+2n-12-n^3+n^2+6n-3n^2+3n+18}{(n+3)(n+2)}=\frac{n^2+5n+6}{(n+3)(n+2)}=1$$

c) $\left(3-2n\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si vypočítáme několik hodnot prvních členů posloupnosti:

$a_1 = 3-2\cdot 1 = 1,$ $\quad a_5 = 3-2\cdot 5 = -7,$

$a_2 = 3-2\cdot 2 = -1,$ $\quad a_6 = 3-2\cdot 6 = -9,$

$a_3 = 3-2\cdot 3 = -3,$ $\quad a_7 = 3-2\cdot 7 = -11,$

$a_4 = 3-2\cdot 4 = -5$ $\quad a_8 = 3-2\cdot 8 = -13$

Je zřejmé, že hodnota následujícího členu je vždy o 2 menší než hodnota členu předcházejícího. Jedná se tedy zřejmě o aritmetickou posloupnost s diferencí $d=-2$, neboť:

$$d = a_{n+1} - a_n = \left(3-2\left(n+1\right)\right) - \left(3-2n\right) = 3-2n-2-3+2n = -2$$

d) $\left(\dfrac{3^n}{2^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si vypočítáme několik hodnot prvních členů posloupnosti

$a_1 = \dfrac{3^1}{2^2} = \dfrac{3}{4},$ $\quad a_4 = \dfrac{3^4}{2^5} = \dfrac{81}{32},$

$a_2 = \dfrac{3^2}{2^3} = \dfrac{9}{8},$ $\quad a_5 = \dfrac{3^5}{2^6} = \dfrac{243}{64}$

$a_3 = \dfrac{3^3}{2^4} = \dfrac{27}{16},$

Z těchto hodnot je vidět, že každý následující člen vznikne z předcházejícího vynásobením číslem $\dfrac{3}{2}$. Jedná se tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $q=\dfrac{3}{2}$. Určíme hodnotu kvocientu z *n*, resp. *n+1* členu:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1+1}}}{\dfrac{3^n}{2^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}}\frac{2^{n+1}}{3^n} = 3^{n+1-n}2^{n+1-(n+2)} = 3^1\cdot 2^{-1} = \frac{3}{2}$$

e) $\left(\log 2^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si vypočítáme několik hodnot prvních členů posloupnosti:

$a_1 = \log 2^{1+1} = \log 2^2$ $\quad a_1 = \log 2^2 = 2\log 2,$

$a_2 = \log 2^{2+1} = \log 2^3$, tedy $\quad a_2 = \log 2^3 = 3\log 2,$

$a_3 = \log 2^{3+1} = \log 2^4$ $\quad a_3 = \log 2^4 = 4\log 2$

Z těchto hodnot je zřejmé, že se každý následující člen posloupnosti liší o hodnotu $\log 2$. Tedy každý následující člen získáme z předcházejícího přičtením hodnoty $\log 2$. Určíme hodnotu diference z *n*, resp. *n+1* členu:

$$d = a_{n+1} - a_n = \log 2^{n+1+1} - \log 2^{n+1} = \left(n+2\right)\log 2 - \left(n+1\right)\log 2 =$$
$$= \left(n+2-n-1\right)\log 2 = \log 2$$

f) $\left(\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si vypočítáme několik hodnot prvních členů posloupnosti:

$a_1 = \left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{e^2}{2}$, $a_4 = \left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{e^5}{4\sqrt{2}}$,

$a_2 = \left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{e^3}{2\sqrt{2}}$, $a_5 = \left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{e^6}{8}$,

$a_3 = \left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{e^4}{4}$ $a_6 = \left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^7 = \frac{e^7}{8\sqrt{2}}$

Z těchto hodnot je vidět, že každý následující člen vznikne z předcházejícího vynásobením číslem $\frac{e}{\sqrt{2}}$. Jedná se tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{e}{\sqrt{2}}$. Určíme hodnotu kvocientu z *n*, resp. *n+1* členu:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^{n}} = \left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)^{n+1-n} = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

g) $\left(\sqrt{10^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve si vypočítáme několik hodnot prvních členů posloupnosti:

$a_1 = \sqrt{10}$, $a_5 = \sqrt{10^5} = 100\sqrt{10}$,

$a_2 = \sqrt{10^2} = 10$, $a_6 = \sqrt{10^6} = 1000$,

$a_3 = \sqrt{10^3} = 10\sqrt{10}$, $a_7 = \sqrt{10^7} = 1000\sqrt{10}$,

$a_4 = \sqrt{10^4} = 100$ $a_8 = \sqrt{10^8} = 10000$

Z těchto hodnot je vidět, že každý následující člen vznikne z předcházejícího vynásobením číslem $\sqrt{10}$. Jedná se tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \sqrt{10}$. Určíme hodnotu kvocientu z *n*, resp. *n+1* členu:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{10^{n+1}}}{\sqrt{10^n}} = \sqrt{\frac{10^{n+1}}{10^n}} = \sqrt{10^{n+1-n}} = \sqrt{10}\,.$$

13.1 Aritmetická a geometrická posloupnost

1. Určete několik členů rekurentně zadané posloupnosti. Rozhodněte, zda jde o posloupnost aritmetickou či geometrickou. Zapište tuto posloupnost pomocí vzorcem pro n-tý člen.
   a) $a_1 = 7, a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$
   b) $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 4$
   c) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$

Řešení:

a) $a_1 = 7, a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$

Nejdříve vypočítáme hodnoty několika prvních členů posloupnosti

$a_1 = 7,$

$a_{1+1} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 1 - 1 = 10,$

$a_{2+1} = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 2 - 1 = 13,$

$a_{3+1} = 2 \cdot 13 - 3 \cdot 3 - 1 = 16$

$a_{4+1} = 2 \cdot 16 - 3 \cdot 4 - 1 = 19,$

$a_{5+1} = 2 \cdot 19 - 3 \cdot 5 - 1 = 22,$

$a_{6+1} = 2 \cdot 22 - 3 \cdot 6 - 1 = 25$

Z hodnot prvních 7 členů posloupnosti je vidět, že každý následující člen posloupnosti získáme z předcházejícího členu přičtením 3. Jedná se tedy o posloupnost aritmetickou s diferencí $d = 3$.

Vzorec pro n-tý člen lze v tomto případě odhadnout

$a_n = 4 + 3n$,

případně užijeme následující metodu:

$a_1 = 7$

$a_2 = a_1 + 3$

$a_3 = a_2 + 3$

...

$a_n = a_{n-1} + 3$

$a_{n+1} = a_n + 3$

Z těchto rovností vytvoříme součet

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} = 7 + a_1 + 3 + a_2 + 3 + ... + a_{n-1} + 3 + a_n + 3$

$a_{n+1} = 7 + 3n$

a posunutím indexu získáváme vzorec pro n-tý člen

$a_{n+1} = 7 + 3n \Rightarrow a_n = 7 + 3n - 3 = 4 + 3n$.

b) $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 4$

Nejdříve vypočítáme hodnoty několika prvních členů posloupnosti:

$a_1 = 5,$

$a_2 = a_1 + 4 = 9,$

$a_3 = a_2 + 4 = 13,$

$a_4 = a_3 + 4 = 16,$

$a_5 = a_4 + 4 = 20$

Z hodnot prvních 5 členů posloupnosti je vidět, že každý následující člen posloupnosti získáme z předcházejícího členu přičtením 4. Jedná se tedy o posloupnost aritmetickou s diferencí $d = 4$.

Vzorec pro n-tý člen lze v tomto případě odhadnout

$a_n = 1 + 4n$,

případně užijeme následující metodu:

$a_1 = 5$

$a_2 = a_1 + 4$

$a_3 = a_2 + 4$

...

$a_n = a_{n-1} + 4$

$a_{n+1} = a_n + 4$

Z těchto rovností vytvoříme součet

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} = 5 + a_1 + 4 + a_2 + 4 + ... + a_{n-1} + 4 + a_n + 4$

$a_{n+1} = 5 + 4n$

a posunutím indexu získáváme vzorec pro n-tý člen

$a_{n+1} = 5 + 4n \Rightarrow a_n = 5 + 4n - 4 = 1 + 4n$.

c) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$

Nejdříve vypočítáme hodnoty několika prvních členů posloupnosti:

$a_1 = 1,$

$a_2 = 3a_1 = 3,$

$a_3 = 3a_2 = 9,$

$a_4 = 3a_3 = 27,$

$a_5 = 3a_4 = 81,$

$a_6 = 3a_5 = 243$

Z hodnot prvních 6 členů posloupnosti je vidět, že každý následující člen posloupnosti získáme z předcházejícího členu vynásobením číslem 3. Jedná se tedy o posloupnost geometrickou s kvocientem $q = 3$.

Vzorec pro n-tý člen lze v tomto případě odhadnout:

$a_n = 3^{n-1}$,

případně užijeme následující metodu:

$a_1 = 1$

$a_2 = 3a_1$

$a_3 = 3a_2$

...

$a_n = 3a_{n-1}$

$a_{n+1} = 3a_n$

Z těchto rovností vytvoříme součin:

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1 \cdot 3a_1 \cdot 3a_2 \cdot ... \cdot 3a_{n-1} \cdot 3a_n$

a jsou-li všechna a_i nenulová, můžeme psát:

$a_{n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^n = 3^n$

a posunutím indexu získáváme vzorec pro n-tý člen

$$a_{n+1} = 3^n \Rightarrow a_n = \frac{3^n}{3} = 3^{n-1}.$$

2. Určete reálné číslo $x \in R$ tak, aby čísla $a_1,\ a_2,\ a_3$ tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.
   a) $a_1 = x^2 + x,\ a_2 = x^2 + 4x + 4,\ a_3 = 16$
   b) $a_1 = \log(2x-1),\ a_2 = \log(4x-2),\ a_3 = \log(5x+2)$
   c) $a_1 = \sin x,\ a_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ a_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Řešení:

a) $a_1 = x^2 + x,\ a_2 = x^2 + 4x + 4,\ a_3 = 16$

Z těchto členů aritmetické posloupnosti vyjádříme diferenci *d*:

$$a_2 - a_1 = x^2 + 4x + 4 - \left(x^2 + x\right) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - x = 3x + 4 = d$$

$$a_3 - a_2 = 16 - \left(x^2 + 4x + 4\right) = 16 - x^2 - 4x - 4 = -x^2 - 4x + 12 = d$$

Musí platit:

$$3x + 4 - \left(-x^2 - 4x + 12\right) = 3x + 4 + x^2 + 4x - 12 = x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$D = 49 - 4(-8) = 49 + 32 = 81, \sqrt{81} = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-7+9}{2} = 1, x_2 = \frac{-7-9}{2} = -8$$

Pro $x_1 = 1, x_2 = -8$ tvoří čísla a_1, a_2, a_3 tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

b) $a_1 = \log(2x-1),\ a_2 = \log(4x-2),\ a_3 = \log(5x+2)$

Z těchto členů aritmetické posloupnosti vyjádříme diferenci *d*:

$$a_2 - a_1 = \log(4x-2) - \log(2x-1) = \log\frac{4x-2}{2x-1} = \log\frac{2(2x-1)}{2x-1} = \log 2 = d$$

$$a_3 - a_2 = \log(5x+2) - \log(4x-2) = \log\frac{5x+2}{4x-2} = d$$

Musí platit:

$$\log 2 - \log\frac{5x+2}{4x-2} = \log\frac{2}{\frac{5x+2}{4x-2}} = \log\frac{2(4x-2)}{5x+2} = 0 \Rightarrow \frac{2(4x-2)}{5x+2} = 1$$

$$2(4x-2) = 5x + 2$$

$$8x - 4 = 5x + 2$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

Pro $x = 2$ tvoří čísla a_1, a_2, a_3 tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

c) $a_1 = \sin x,\ a_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ a_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Z těchto členů aritmetické posloupnosti vyjádříme diferenci *d*:

$$a_2 - a_1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = d$$

$$a_3 - a_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = d$$

Pomocí součtových vzorců získáváme:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\sin x=d$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=d$$

Musí platit:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\sin x-\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=$$

$$=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x-\sin x-\cos x=\sin x\left(\sqrt{2}-1\right)+\cos x\left(\sqrt{2}-1\right)=0$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0\Rightarrow\sin x+\cos x=0$$

$$\sin x+\sqrt{1-\sin^2 x}=0$$

$$\sin x=-\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x=1-\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x=1\Rightarrow\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi, x_1'=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$$

$$\sin x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_2^0=\frac{\pi}{4}, x_2=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, x_2'=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$$

Pro $x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi, x_1'=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ a pro $x_2=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, x_2'=\frac{7\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$ tvoří čísla a_1, a_2, a_3 tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

3. Určete reálné číslo $x\in R$ tak, aby čísla $a_1,\ a_2,\ a_3$ tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti.
   a) $a_1=1,\ a_2=2^x,\ a_3=2^{x+2}+12$
   b) $a_1=1+2\log x,\ a_2=3-4\log x,\ a_3=3+\log x$

Řešení:

a) $a_1=1,\ a_2=2^x,\ a_3=2^{x+2}+12$

Z těchto členů geometrické posloupnosti vyjádříme kvocient q

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2^x}{1}=2^x=q$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2^{x+2}+12}{2^x}=q$$

Musí platit:

$$\frac{\frac{2^x}{2^{x+2}+12}}{2^x}=\frac{2^x2^x}{2^{x+2}+12}=\frac{2^{2x}}{2^{x+2}+12}=1$$

$$2^{2x}=2^{x+2}+12$$

$$2^{2x}-2^{x+2}-12=0$$

$$2^x2^x-2^x2^2-12=0\,/\,\text{subst. }:2^x=z$$

$$z^2-4z-12=0\Rightarrow D=16-4(-12)=16+48=64\Rightarrow\sqrt{D}=8$$

$$z_{1,2}=\frac{4\pm 8}{2}\Rightarrow z_1=6, z_2=-2$$

Návratem k substituci

$$2^x=6\Rightarrow x=\log_2 6$$

$$2^x=-2\Rightarrow N\check{R}$$

Pro $x=\log_2 6$ tvoří čísla $a_1,\ a_2,\ a_3$ tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

b) $a_1=1+2\log x,\quad a_2=3-4\log x,\quad a_3=3+\log x$

Z těchto členů geometrické posloupnosti vyjádříme kvocient q:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3-4\log x}{1+2\log x}=q$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{3+\log x}{3-4\log x}=q$$

Musí platit:

$$\frac{\frac{3-4\log x}{1+2\log x}}{\frac{3+\log x}{3-4\log x}}=\frac{3-4\log x}{1+2\log x}\frac{3-4\log x}{3+\log x}=\frac{(3-4\log x)^2}{(1+2\log x)(3+\log x)}=1$$

$$\frac{9-24\log x+16\log^2 x}{3+\log x+6\log x+2\log^2 x}=\frac{9-24\log x+16\log^2 x}{3+7\log x+2\log^2 x}=1$$

$$9-24\log x+16\log^2 x=3+7\log x+2\log^2 x$$

$$14\log^2 x-31\log x+6=0\,/\,subst.: y=\log x$$

$$14y^2-31y+6=0\Rightarrow D=961-336=625\Rightarrow\sqrt{D}=25$$

$$y_{1,2}=\frac{31\pm 25}{28}\Rightarrow y_1=2, y_2=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

Návratem k substituci:

$$y_1=\log x_1$$

$$2=\log x_1\Rightarrow x_1=100$$

$$y_2=\log x_2$$

$$\frac{3}{14}=\log x_2\Rightarrow x_2=10^{\frac{3}{14}}=\sqrt[14]{10^3}$$

Podmínky:

$3+7\log x+2\log^2 x\neq 0\,/\,\text{subst.}: z=\log x$

$2z^2+7z+3\neq 0\Rightarrow D=49-24=25\Rightarrow\sqrt{D}=5$

$z_{1,2}=\dfrac{-7\pm 5}{4}\Rightarrow z_1=-\dfrac{1}{2}, z_2=-3$

$z_1\neq\log x_1$

$-\dfrac{1}{2}\neq\log x_1\Rightarrow x_1\neq 10^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$z_2\neq\log x_2$

$-3\neq\log x_2\Rightarrow x_2\neq 10^{-3}=\dfrac{1}{1000}=0{,}001$

Pro $x_1=100,\ x_2=\sqrt[14]{10^3}$ tvoří čísla $a_1,\ a_2,\ a_3$ tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

4. V aritmetické posloupnosti platí $a_1=10, d=5$. Kolikátý člen této posloupnosti je roven:
   a) 125
   b) 300

Řešení:

a) 125

V aritmetické posloupnosti platí:

$a_n=a_1+(n-1)d$

dosadíme do vztahu a vyjádříme neznámou n

$125=10+(n-1)5$

$125=10+5n-5$

$110=5n$

$n=22$

22. člen dané posloupnosti má hodnotu 125.

b) 300

V aritmetické posloupnosti platí:

$a_n=a_1+(n-1)d$

dosadíme do vztahu a vyjádříme neznámou n

$300=10+(n-1)5$

$300=10+5n-5$

$285=5n$

$n=57$

57. člen dané posloupnosti má hodnotu 300.

5. V geometrické posloupnosti platí $a_1 = 36,\ q = \frac{3}{2}$. Kolikátý člen této posloupnosti je roven $\frac{78732}{128}$.

Řešení: V geometrické posloupnosti platí, že $a_n = a_1 q^{n-1}$. Dosadíme do vztahu a vyjádříme neznámou n

$$\frac{78732}{128} = 36 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{2187}{128} = \frac{3^7}{2^7} = \left(\frac{3}{2}\right)^7$$

$$n - 1 = 7$$

$$n = 8$$

8. člen uvedené posloupnosti je roven $\frac{78732}{128}$.

6. V geometrické posloupnosti platí $a_1 = -\sqrt{2}, q = -\sqrt{3}$. Kolikátý člen této posloupnosti je roven $(729)\sqrt{3}\sqrt{2}$.

Řešení: V geometrické posloupnosti platí, že $a_n = a_1 q^{n-1}$. Dosadíme do vztahu a vyjádříme neznámou n

$$(729)\sqrt{2}\sqrt{3} = -\sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^{n-1}$$

$$\left(-\sqrt{3}\right)^{n-1} = (-3)^{\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{(729)\sqrt{2}\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} = -729\sqrt{3} = -\sqrt{3}3^6 = -3^{\frac{1}{2}}3^6 = -3^{\frac{13}{2}}$$

$$\frac{1}{2}(n-1) = \frac{13}{2}$$

$$n - 1 = 13$$

$$n = 14$$

Hodnota 14. členu uvedené geometrické posloupnosti je rovna $(729)\sqrt{3}\sqrt{2}$.

7. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které $a_4 = 9, a_{10} = 57$.

Řešení: V aritmetické posloupnosti platí, že $a_r = a_s + (r - s)d,\ \forall r, s : r \geq s$. Dosazením:

$$a_{10} = a_4 + (10 - 4)d$$

$$57 = 9 + 6d$$

$$d = 8$$

Pro první člen posloupnosti platí:

$$a_1 = a_4 - 3d = 9 - 3 \cdot 8 = -15$$

V dané aritmetické posloupnosti je $a_1 = -15, d = 8$.

8. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které $a_3=-\frac{3}{2},\ a_{11}=3$.

Řešení: V aritmetické posloupnosti platí, že $a_r=a_s+(r-s)d,\ \forall r,s:r\geq s$. Dosazením:

$$a_{11}=a_3+(11-3)d$$
$$3=-\frac{3}{2}+8d$$
$$8d=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$
$$d=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{16}$$

Pro první člen posloupnosti platí:

$$a_1=a_3-2d=-\frac{3}{2}-2\cdot\frac{9}{16}=-\frac{3}{2}-\frac{18}{16}=-\frac{24}{16}-\frac{18}{16}=-\frac{42}{16}=-\frac{21}{8}$$

V dané aritmetické posloupnosti je $a_1=-\frac{21}{8},\ \ d=\frac{9}{16}$.

9. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které:

$$\begin{aligned}2a_2-a_3&=20\\ a_4-5a_1&=-95\end{aligned}.$$

Řešení: Vyjádříme si všechny členy v této soustavě rovnic pomocí prvního členu a diference, neboť platí:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

Tedy:

$$\begin{aligned}2(a_1+d)-(a_1+2d)&=20\\ a_1+3d-5a_1&=-95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a_1+2d-a_1-2d&=20\\ -4a_1+3d&=-95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1&=20\\ -4(20)+3d&=-95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-80+3d&=-95\\ 3d&=-15\\ d&=-5\end{aligned}$$

První člen a diference zadané posloupnosti je $a_1=20,\ \ d=-5$.

10. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_4 \\ a_2 &= -a_8 \end{aligned}.$$

Řešení:

$$a_1 + 2d = 2\left(a_1 + 3d\right)$$
$$\underline{a_1 + d = -\left(a_1 + 7d\right)}$$
$$-a_1 - 4d = 0 / \cdot 2$$
$$\underline{2a_1 + 8d = 0}$$
$$-2a_1 - 8d = 0 / \left(+\right)$$
$$\underline{2a_1 + 8d = 0}$$
$$0 = 0 \Rightarrow a_1 \in R$$
$$-a_1 - 4d = 0$$
$$-4d = a_1$$
$$d = -\frac{a_1}{4}$$

První člen a diference zadané posloupnosti je $a_1 \in R, d = -\frac{a_1}{4}$.

11. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$\begin{aligned} a_4 + a_5 + a_7 + a_8 &= 10 \\ \frac{a_{21}}{a_1} &= 2 \end{aligned}.$$

Řešení:

$$a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 6d + a_1 + 7d = 10$$
$$\underline{\frac{a_1 + 20d}{a_1} = 2}$$
$$2a_1 + 10d = 5$$
$$\underline{-a_1 + 20d = 0 / \cdot 2}$$
$$2a_1 + 10d = 5 / \left(+\right)$$
$$\underline{-2a_1 + 40d = 0}$$
$$50d = 5$$
$$d = \frac{1}{10}$$
$$-a_1 + 20\frac{1}{10} = 0$$
$$a_1 = 2$$

První člen a diference zadané posloupnosti je $a_1 = 2, d = \frac{1}{10}$.

12. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 5 \\ a_1^2 + a_2^2 &= 13 \end{aligned}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 + d &= 5 \\ a_1^2 + (a_1 + d)^2 &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 + d &= 5 \\ a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 d + d^2 &= 13 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2a_1 + d &= 5 \\ 2a_1^2 + 2a_1 d + d^2 &= 13 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = \frac{5-d}{2}$$

$$2\left(\frac{5-d}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{5-d}{2}\right)d + d^2 = 13$$

$$2\left(\frac{25-10d+d^2}{4}\right) + (5-d)d + d^2 = 13 / \cdot 2$$

$$25 - 10d + d^2 + 10d - 2d^2 + 2d^2 = 26$$

$$d^2 = 1 \Rightarrow d_{1,2} = \pm 1$$

$$a_1 = \frac{5-d_1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2, a_1' = \frac{5-d_2}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

První člen a diference zadané posloupnosti je $a_1 = 2, d_1 = 1, a_1' = 3, d_2 = -1$.

13. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$\begin{aligned} a_3 + a_5 &= 8 \\ a_3^2 - a_5^2 &= 32 \end{aligned}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 4d &= 8 \\ (a_1 + 2d)^2 - (a_1 + 4d)^2 &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 + 6d &= 8 \\ a_1^2 + 4a_1 d + 4d^2 - a_1^2 - 8a_1 d - 16d^2 &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_1 + 6d &= 8 \\ -4a_1 d - 12d^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{8-6d}{2} = 4-3d$$

$$-4(4-3d)d - 12d^2 = 32$$

$$-16d + 12d^2 - 12d^2 = 32$$

$$-16d = 32$$

$$d = -2$$

$$a_1 = 4-3d = 4-3(-2) = 4+6 = 10$$

První člen a diference zadané posloupnosti je $a_1 = 10, d = -2$.

14. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_2 = 16,\ a_4 = 1$

b) $a_1 + a_2 - a_4 = -110$

$a_2 + a_3 - a_5 = -220$

c) $a_8 - a_4 = 360$

$a_7 - a_5 = 144$

d) $a_2 + a_3 = 60$

$a_1 + a_4 = 252$

Řešení:

a) $a_2 = 16, a_4 = 1$

V geometrické posloupnosti platí, že $a_r = a_s q^{r-s},\ \forall r,s \in N,\ r > s$

Platí tedy:

$$a_4 = a_2 q^2 \Rightarrow 1 = 16q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{16}$$

$$q = \pm\frac{1}{4}$$

Pro první člen posloupnosti platí:

$$a_2 = a_1 q \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64$$

$$a_1' = \frac{a_2}{q'} = \frac{16}{\frac{-1}{4}} = -64$$

V dané geometrické posloupnosti je první člen a kvocient roven $a = \pm 64,\ q = \pm\frac{1}{4}$

b) $a_1 + a_2 - a_4 = -110$

$a_2 + a_3 - a_5 = -220$

$$a_1 + a_1 q - a_1 q^3 = -110$$

$$\underline{a_1 q + a_1 q^2 - a_1 q^4 = -220}$$

$$a_1\left(1+q-q^3\right)=-110$$
$$\underline{a_1q\left(1+q-q^3\right)=-220}$$
$$\left(1+q-q^3\right)=-\frac{110}{a_1}, a_1\neq 0$$
$$a_1q\left(-\frac{110}{a_1}\right)=-220$$
$$-110q=-220$$
$$q=2$$

$$a_1\left(1+2-8\right)=-110$$
$$-5a_1=-110$$
$$a_1=22$$

V dané geometrické posloupnosti je první člen a kvocient roven $a_1=22,\ q=2$

c)
$$a_8-a_4=360$$
$$a_7-a_5=144$$

$$a_1q^7-a_1q^3=360$$
$$\underline{a_1q^6-a_1q^4=144}$$
$$a_1q^3(q^4-1)=360$$
$$\underline{a_1q^4(q^2-1)=144}$$
$$\frac{a_1q^3\left(q^4-1\right)}{a_1q^4\left(q^2-1\right)}=\frac{360}{144}$$
$$\frac{a_1q^3\left(q^2-1\right)\left(q^2+1\right)}{a_1q^4\left(q^2-1\right)}=\frac{360}{144}$$
$$\frac{\left(q^2+1\right)}{q}=\frac{5}{2}$$
$$2q^2+2=5q$$
$$2q^2-5q+2=0\Rightarrow D=25-16=9\Rightarrow D=3$$
$$q_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4}\Rightarrow q_1=2, q_2=\frac{1}{2}$$

Dosazením hodnot kvocientů do příslušné rovnice získáváme hodnoty prvních členů

$$8a_1\left(16-1\right)=360$$
$$120a_1=360$$
$$a_1=3$$

$$\frac{1}{8}a_1'\left(\frac{1}{16}-1\right)=360$$
$$-\frac{15}{48}a_1'=360$$
$$a_1=-1152$$

V dané geometrické posloupnosti platí: $a_1=3, q_1=2; a_2=-1152, q_2=\frac{1}{2}$.

d) $a_2 + a_3 = 60$
$a_1 + a_4 = 252$

Členy posloupnosti přepíšeme pomocí prvního členu:

$$a_1q + a_1q^2 = 60$$
$$\underline{a_1 + a_1q^3 = 252}$$
$$a_1q(1+q) = 60$$
$$\underline{a_1(1+q^3) = 252}$$
$$a_1q(1+q) = 60 \Rightarrow a_1(1+q) = \frac{60}{q}$$
$$\underline{a_1(1+q)(q^2-q+1) = 252}$$

$$\frac{60}{q}\left(q^2-q+1\right) = 252$$
$$60\left(q^2-q+1\right) = 252q$$
$$60q^2 - 60q + 60 - 252q = 0$$
$$60q^2 - 312q + 60 = 0$$
$$5q^2 - 26q + 5 = 0 \Rightarrow D = 676 - 100 = 576$$
$$\sqrt{D} = 24$$
$$q_{1,2} = \frac{26 \pm 24}{10} \Rightarrow q_1 = 5, q_2 = \frac{1}{5}$$

Dosazením hodnot kvocientů do příslušné rovnice získáváme hodnoty prvních členů:

$$a_1\left(1+5\right) = \frac{60}{5} \Rightarrow a_1 = 12$$
$$a_1\left(1+\frac{1}{5}\right) = \frac{60}{\frac{1}{5}} \Rightarrow a_1{}' = 250$$

V dané geometrické posloupnosti platí: $a_1 = 12, q_1 = 5; a_1{}' = 250, q_2{}' = \frac{1}{5}$.

15. Tři čísla, která tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti, mají součet 60 a součin 7500. Určete tato čísla.

Řešení:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 60$$
$$a_1a_2a_3 = 7500$$

Členy posloupnosti přepíšeme pomocí prvního členu:

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 60$$
$$\underline{a_1\left(a_1+d\right)\left(a_1+2d\right) = 7500}$$

$3a_1 + 3d = 60 \Rightarrow a_1 + d = 20 \Rightarrow a_1 = 20 - d$

$\underline{a_1(a_1+d)(a_1+2d) = 7500}$

$$(20-d)(20-d+d)(20-d+2d) = 7500$$
$$(20-d)20(20-d+2d) = 7500$$
$$(400-d^2)\cdot 20 = 7500$$
$$8000 - 20d^2 = 7500$$
$$20d^2 = 500$$
$$d^2 = 25$$
$$d = \pm 5$$

$a_1 = 20 - d = 20 - 5 = 15$

$a_1' = 20 - d = 20 + 5 = 25$

Získáváme dvě posloupnosti:

$a_1 = 15, a_2 = 20, a_3 = 25$

$a_1' = 25, a_2' = 20, a_3' = 15$

16. Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět následujících členů aritmetické posloupnosti.

Řešení:

V této posloupnosti musí platit:

$a_1 = 8$

$a_5 = 648$

$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 8 + 4d$

$4d = 648 - 8$

$d = 160$

Získáváme tedy dvě posloupnosti:

Pro $a_1 = 8, d = 160$ platí: $a_1 = 8, a_2 = 168, a_3 = 328, a_4 = 488, a_5 = 648$

Pro $a_1 = 648, d = -160$ platí: $a_1 = 648, a_2 = 488, a_3 = 328, a_4 = 168, a_5 = 8$

17. Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět následujících členů geometrické posloupnosti.

Řešení:

V této posloupnosti musí platit:

$a_1 = 8$

$a_5 = 648$

$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow 648 = 8q^4$

$q_{1,2} = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$

Získáváme tedy 4 posloupnosti:

$a_1 = 8, a_2 = 24, a_3 = 72, a_4 = 216, a_5 = 648$

Pro $a_1 = 8, q = 3$ platí: $a_1 = 8, a_2 = 24, a_3 = 72, a_4 = 216, a_5 = 648$
Pro $a_1 = 8, q = -3$ platí: $a_1 = 8, a_2 = -24, a_3 = 72, a_4 = -216, a_5 = 648$
Pro $a_1 = 648, q = \frac{1}{3}$ platí: $a_1 = 648, a_2 = 216, a_3 = 72, a_4 = 24, a_5 = 8$
Pro $a_1 = 648, q = -\frac{1}{3}$ platí: $a_1 = 648, a_2 = -216, a_3 = 72, a_4 = -24, a_5 = 8$

18. V geometrické posloupnosti je dáno $a_1 = \frac{1}{64}, q = 2$. Určete $n \in N$ tak, aby platilo: $a_n + a_{2n} = 8200$.

Řešení:

$$a_1 q^{n-1} + a_1 q^{2n-1} = 8200$$
$$\frac{1}{64}2^{n-1} + \frac{1}{64}2^{2n-1} = 8200$$
$$\frac{1}{64}\frac{2^n}{2} + \frac{1}{64}\frac{2^{2n}}{2} = 8200$$
$$\frac{1}{128}2^{2n} + \frac{1}{64}2^n - 8200 = 0 \qquad / \cdot 128$$
$$2^{2n} + 2^n - 1049600 = 0 \Rightarrow D = 1 + 4198400 = 4198401$$
$$\sqrt{D} = 2049$$
$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 2049}{2} \Rightarrow y_1 = 1024, y_2 = -1025$$

Návrat k substituci

$$1024 = 2^{n_1}$$
$$n_1 = 10$$
$$-1025 = 2^{n_2}$$

Druhá rovnice nemá řešení. Nalezli jsme tedy hledanou hodnotu $n = 10$.

19. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny tvořila šest po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti.

Řešení:

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow D = 100 - 64 = 36$$
$$\sqrt{D} = 6$$
$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = 2$$

Platí tedy, že $a_1 = 2, a_6 = 8$ a také $a_1 = 8, a_6 = 2$

$$a_6 = a_1 + 5d$$
$$8 = 2 + 5d \Rightarrow d = \frac{6}{5}$$

Také

$$a_6 = a_1 + 5d$$
$$2 = 8 + 5d \Rightarrow d = -\frac{6}{5}$$

Dostáváme tedy následující aritmetickou posloupnost:
$a_1 = 2, a_2 = \frac{16}{5}, a_3 = \frac{22}{5}, a_4 = \frac{28}{5}, a_5 = \frac{34}{5}, a_6 = 8$
Další posloupností je posloupnost:
$a_1 = 8, a_2 = \frac{34}{5}, a_3 = \frac{28}{5}, a_4 = \frac{22}{5}, a_5 = \frac{16}{5}, a_6 = 8$

20. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny tvořila šest po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti.

Řešení:

$x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow D = 100 - 64 = 36$

$\sqrt{D} = 6$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = 2$

Platí tedy, že $a_1 = 2, a_6 = 8$ a také $a_1 = 8, a_6 = 2$

$a_6 = a_1 q^5$

$8 = 2q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{4}$

Také:

$a_6 = a_1 q^5$

$2 = 8q^5 \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

Dostáváme tedy následující aritmetickou posloupnost:
$a_1 = 2, a_2 = 2\sqrt[5]{4}, a_3 = 2\sqrt[5]{4^2}, a_4 = 2\sqrt[5]{4^3}, a_5 = 2\sqrt[5]{4^4}, a_6 = 8$
Další posloupností je posloupnost:
$a_1 = 8, a_2 = \frac{8}{\sqrt[5]{4}}, a_3 = \frac{8}{\sqrt[5]{4^2}}, a_4 = \frac{8}{\sqrt[5]{4^3}}, a_5 = \frac{8}{\sqrt[5]{4^4}}, a_6 = 2$

21. V aritmetické posloupnosti známe první člen a diferenci $a_1 = 18, d = -5$. Určete $\forall n \in N$ tak, aby platilo, že $a_n + a_{n+3} = -189$.

Řešení:

Členy posloupnosti zapíšeme pomocí prvního členu a diference:

$$a_1 + (n-1)d + a_1 + (n+3-1)d = -189$$
$$18 + (n-1)(-5) + 18 + (n+2)(-5) = -189$$
$$18 - 5n + 5 + 18 - 5n - 10 = -189$$
$$-10n = 22$$

Uvedená rovnost je splněna, je-li $n = 22$.

22. Určete dvě reálná čísla x, y tak, aby čísla 3, x, y tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti a čísla x, y, 18 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.

Řešení:

Platí:

$GP: 3, x = 3q, y = 3q^2$

$AP: x, y = x + d, 18$

Vytvoříme soustavu rovnic:

$$\underline{\begin{array}{l} y = x + d \\ \underline{18 = x + 2d} \\ 3q^2 = 3q + d \\ 18 = 3q + 2d \end{array}}$$

$$3q = 18 - 2d \Rightarrow q = \frac{18-2d}{3} = 6 - \frac{2}{3}d$$

$$3\left(6 - \frac{2}{3}d\right)^2 = 3\left(6 - \frac{2}{3}d\right) + d$$

$$3\left(36 - \frac{24}{3}d + \frac{4}{9}d^2\right) = 18 - 2d - d$$

$$108 - 24d + \frac{4}{3}d^2 = 18 - d$$

$$\frac{4}{3}d^2 - 23d + 90 = 0$$

$$4d^2 - 69d + 270 = 0 \Rightarrow D = 4761 - 4320 = 441 \Rightarrow \sqrt{D} = 21$$

$$d_{1,2} = \frac{69 \pm 21}{8} \Rightarrow d_1 = \frac{45}{5}, d_2 = 6$$

$$q_1 = 6 - \frac{2}{3}\frac{45}{5} = 6 - \frac{90}{12} = \frac{72-90}{12} = -\frac{3}{2}$$

$$q_1 = 6 - \frac{2}{3}6 = 6 - \frac{12}{3} = 2$$

Pro geometrickou posloupnost platí:

$3, -\frac{3}{2}3 = -\frac{9}{2}, \left(-\frac{3}{2}\right)^2 3 = \frac{27}{4} \Rightarrow x = -\frac{9}{2}, y = \frac{27}{4}$

$3, 6, 12 \Rightarrow x = 6, y = 12$

Pro aritmetickou posloupnost platí:

$-\frac{9}{2}, \frac{27}{4}, 18 \Rightarrow x = -\frac{9}{2}, y = \frac{27}{4}$

$6, 12, 18 \Rightarrow x = 6, y = 12$

23. Určete čtyři čísla tak, aby první tři tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -3$ a poslední tři tvořila následující členy geometrické posloupností s kvocientem $q = \frac{1}{2}$.

Řešení:

Pro první tři členy, které tvoří aritmetickou posloupnost, platí:

a_1

$a_2 = a_1 + d = a_1 - 3$

$a_3 = a_1 + 2d = a_1 - 6$

Pro členy geometrické posloupnosti platí:

a_2

$a_3 = a_1 q = \frac{1}{2} a_2$

$a_4 = a_2 q^2 = \frac{1}{4} a_2$

Získáváme soustavu:

$a_1 - 6 = \frac{1}{2} a_2$

$\underline{a_1 - 3 = a_2}$

$a_1 - 6 = \frac{a_1 - 3}{2}$

$2a_1 - 12 = a_1 - 3$

$a_1 = 9$

Daná čtveřice čísel je tedy:

$9,\ 6,\ 3,\ \frac{3}{2}$

24. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníka je 96 cm. Vypočítejte délky stran.

Řešení: V zadaném pravoúhlém trojúhelníku o stranách a_1, a_2, a_3, kde a_3 je odvěsna, platí:

$a_1 + a_2 + a_3 = 96$

$\underline{a_1^2 + a_2^2 = a_3^2}$

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 96$

$\underline{a_1^2 + (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2d)^2}$

$3a_1 + 3d = 96 \qquad /:3$

$\underline{a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 4a_1 d + 4d^2}$

$a_1 + d = 32 \Rightarrow a_1 = 32 - d$

$a_1^2 - 2a_1 d - 3d^2 = 0$

$(32 - d)^2 - 2(32 - d)d - 3d^2 = 0$

$1024 - 64d + d^2 - 64d + 2d^2 - 3d^2 = 0$

$-128d = -1024$

$d = 8$

$a_1 = 32 - 8 = 24$

Pro strany pravoúhlého trojúhelníka tedy platí: $a_1 = 24, a_2 = 32, a_3 = 40$
$o = 24 + 32 + 40 = 94$ cm

25. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3, d = 4$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby byl součet větší než 250?

Řešení: Ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ lze získat následující nerovnici:

$$250 < \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right]$$

$$250 < \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d)$$

$$250 < \frac{n}{2}(6 + 4n - 4) / \cdot 2$$

$$500 < 2n + 4n^2$$

$$4n^2 + 2n - 500 > 0$$

$$2n^2 + n - 250 > 0 \Rightarrow D = 1 + 2000 = 2001 \Rightarrow \sqrt{D} = 20\sqrt{5}$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm 20\sqrt{5}}{4}$$

Kvadratický trojčlen lze tedy rozložit:

$$2 \cdot \left(n - \frac{-1 + 20\sqrt{5}}{4}\right)\left(n + \frac{-1 - 20\sqrt{5}}{4}\right) > 0$$

Řešením této nerovnice je interval:

$$n \in \left(-\infty, \frac{-1 - 20\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(\frac{-1 + 20\sqrt{5}}{4}, \infty\right)$$

Jelikož je $n \in N$, pak řešením je první přirozené číslo větší než $\frac{-1 + 20\sqrt{5}}{4}$. Přibližná hodnota tohoto čísla je 10,93. Je třeba vzít tedy alespoň 11 členů této posloupnosti, aby jejich součet byl větší než 250.

26. V aritmetické posloupnosti známe $a_3 = 18$. Určete podmínku pro diferenci tak, aby platilo $s_9 \le 150$.

Řešení: Ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ plyne

$$s_9 = \frac{9}{2}(a_3 - 2d + a_3 + 6d)$$

Neboť:

$$a_1 = a_3 - 2d, a_9 = a_3 + 6d$$

Dosazením:

$$150 \geq \frac{9}{2}\left(2a_3 + 4d\right)$$

$$150 \geq \frac{9}{2}36\left(2a_3 + 4d\right) \qquad / \cdot 2$$

$$300 \geq 324 + 36d$$

$$36d \leq -24$$

$$d \leq -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}$$

Diference takovéto aritmetické posloupnosti musí být $d \leq -\frac{2}{3}$.

27. Určete, jakou podmínku musí splňovat první člen aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 5$, aby platilo $s_{20} \geq 1000$.

Řešení: Ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti $s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$ plyne

$$s_{20} = \frac{20}{2}\left(a_1 + a_{20}\right) = \frac{20}{2}\left(a_1 + a_1 + 19d\right) = 10\left(2a_1 + 95\right) \geq 1000$$

$$20a_1 + 950 \geq 1000$$

$$20a_1 \geq 50$$

$$a_1 \geq \frac{50}{20} \Rightarrow a_1 \geq \frac{5}{2}$$

První člen dané aritmetické posloupnosti musí splňovat podmínku $a_1 \geq \frac{5}{2}$

28. Určete součet všech sudých čísel, která vyhovují nerovnici $x^2 - 53x + 150 \leq 0$.

Řešení:

Vyřešíme nerovnici:

$$x^2 - 53x + 150 \leq 0$$

$$D = 2809 - 600 = 2209 \Rightarrow \sqrt{D} = 47$$

$$x_{1,2} = \frac{53 \pm 47}{2} \Rightarrow x_1 = 50, x_2 = 3$$

Uvedená nerovnost je splněna, jestliže $x \in \langle 3,50 \rangle$.

V tomto intervalu se nacházejí následující sudá čísla: $4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots, 48, 50$

Počet sudých čísel v tomto intervalu je 24. Součet těchto sudých čísel:

$$s_{24} = \frac{24}{2}(4 + 50) = 648$$

Součet všech sudých čísel vyhovující příslušné nerovnici je 648.

29. V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, jestliže platí: $a_6 = -\frac{1}{3}a_{16},\ s_{26} = 104$.

Řešení:

$$a_6 = a_1 + 5d$$
$$a_{16} = a_1 + 15d$$
$$a_{26} = a_1 + 25d$$

a tedy:

$$a_1 + 5d = -\frac{1}{3}\left(a_1 + 15d\right) / \cdot 3$$
$$\underline{s_{26} = \frac{26}{2}\left(a_1 + a_{26}\right) = 13\left(a_1 + a_1 + 25d\right) = 26a_1 + 325d = 104}$$

$$3a_1 + 15d = -a_1 - 15d$$
$$\underline{26a_1 + 325d = 104}$$

$$4a_1 + 30d = 0 / \cdot\left(-\frac{13}{2}\right)$$
$$\underline{26a_1 + 325d = 104}$$

$$-26a_1 - 195d = 0$$
$$\underline{26a_1 + 325d = 104}$$

$$130d = 104$$
$$d = \frac{104}{130} = \frac{4}{5}$$
$$4a_1 + 30\cdot\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$
$$4a_1 = -24$$
$$a_1 = -6$$

V dané aritmetické posloupnosti platí: $a_1 = -6,\ d = \frac{4}{5}$.

30. V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, jestliže platí: $s_5 = 60, s_{10} = 170$.

Řešení:

$$a_5 = a_1 + 4d$$
$$a_{10} = a_1 + 9d$$

a tedy:

$$s_5 = \frac{5}{2}\left(a_1 + a_5\right) = \frac{5}{2}\left(a_1 + a_1 + 4d\right) = \frac{5}{2}\left(2a_1 + 4d\right) = 60$$
$$\underline{s_{10} = \frac{10}{2}\left(a_1 + a_{10}\right) = 5\left(a_1 + a_1 + 9d\right) = 5\left(2a_1 + 9d\right) = 170}$$

$$\frac{5}{2}(2a_1+4d)=60 \qquad /\cdot 2$$
$$\underline{5(2a_1+9d)=170}$$
$$10a_1+20d=120$$
$$\underline{10a_1+45d=170 \qquad /\cdot(-1)}$$
$$-25d=-50$$
$$d=2$$

$$10a_1+40=120$$
$$10a_1=80$$
$$a_1=8$$

V dané aritmetické posloupnosti platí $a_1 = 8,\ d = 2$.

31. V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, jestliže platí: $s_{10} = s_{11} = 165$.

Řešení:

$$a_{10}=a_1+9d, a_{11}=a_1+10d$$

a tedy:

$$s_{10}=\frac{10}{2}(a_1+a_{10})=5(a_1+a_1+9d)=5(2a_1+9d)=165$$
$$\underline{s_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=\frac{11}{2}(a_1+a_1+10d)=\frac{11}{2}(2a_1+10d)=165}$$
$$5(2a_1+9d)=165$$
$$\underline{\frac{11}{2}(2a_1+10d)=165}$$
$$2a_1+9d=33$$
$$\underline{11a_1+55d=165}$$
$$2a_1+9d=33$$
$$\underline{a_1+5d=15}/\cdot(-2)$$
$$2a_1+9d=33$$
$$\underline{-2a_1-10d=-30}$$
$$-d=3 \Rightarrow d=-3$$
$$2a_1+9\cdot(-3)=33$$
$$2a_1=33+27=60 \Rightarrow a_1=30$$

V dané aritmetické posloupnosti platí $a_1 = 30, d = -3$.

32. V aritmetické posloupnosti je první člen a diference $a_1 = 10, d = -2$. Vypočítejte člen, který je roven jedné šestině součtu všech členů předchozích.

Řešení: Pro hledaný člen posloupnosti musí platit, že $a_n = \frac{1}{6} s_{n-1}$

$$a_1 + (n-1)d = \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{2}(a_1 + a_{n-1})$$

$$a_1 + (n-1)d = \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{2}(a_1 + a_1 + (n-2)d)$$

$$a_1 + (n-1)d = \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{2}(2a_1 + (n-2)d)$$

$$a_1 + (n-1)d = \frac{n-1}{12}(2a_1 + (n-2)d)$$

$$10 + (n-1)(-2) = \frac{n-1}{12}(20 + (n-2)(-2))$$

$$10 - 2n + 2 = \frac{n-1}{12}(20 - 2n + 4)$$

$$12 - 2n = \frac{n-1}{12}(24 - 2n) \qquad / \cdot 12$$

$$144 - 24n = (n-1)(24 - 2n)$$

$$144 - 24n = 24n - 24 + 2n$$

$$2n^2 - 50n + 168 = 0 \Rightarrow n^2 - 25n + 84 = 0 \Rightarrow D = 625 - 336 = 289 \Rightarrow \sqrt{D} = 17$$

$$n_{1,2} = \frac{25 \pm 17}{2} \Rightarrow n_1 = 21, n_2 = 4$$

Jedná se tedy o čtvrtý a dvacátý první člen posloupnosti:

$a_4 = a_1 + 3d = 10 - 6 = 4, a_{21} = a_1 + 20d = 10 - 40 = -30$

33. V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 36$ určete kvocient tak, aby platilo, že $s_2 \leq 252$.

Řešení: Pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí, že $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$. Tedy:

$$s_2 = 36\frac{1-q^2}{1-q} \leq 252$$

$$\frac{1-q^2}{1-q} \leq 7$$

$$\frac{1-q^2}{1-q} - 7 \leq 0$$

$$\frac{1-q^2-7+7q}{1-q} \leq 0$$

$$\frac{-q^2-6+7q}{1-q} \leq 0$$

$$\frac{q^2-7q+6}{1-q} \geq 0$$

Rozložením čitatele získáváme:

$$\frac{(q-1)(q-6)}{1-q} \geq 0$$

$$q-6 \leq 0$$

$$q \leq 6$$

Řešením této nerovnice je:

$$q \in (-\infty, 6\rangle$$

34. V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je $a_n = 96$.

Řešení:

$$186 = a_1\frac{1-2^n}{1-2} = a_1\frac{1-2^n}{-1} = -a_1\left(1-2^n\right)$$

Jelikož:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

Pak:

$$186=-\frac{a_n}{q^{n-1}}\left(1-2^n\right)=-2\frac{96}{q^{n-1}}\left(1-2^n\right) \qquad /\cdot 2^{n-1}$$

$$186\cdot 2^{n-1}=-96\left(1-2^n\right)$$

$$\frac{186}{2}\cdot 2^n=-96+96\cdot 2^n$$

$$93\cdot 2^n=-96+96\cdot 2^n$$

$$93\cdot 2^n-96\cdot 2^n=-96$$

$$2^n\left(93-96\right)=-96$$

$$\left(-3\right)\cdot 2^n=-96$$

$$2^2=32\Rightarrow n=5$$

Příslušný součet dává právě 5 členů dané geometrické posloupnosti.

35. V geometrické posloupnosti platí $s_6=9s_3$. Určete a_1, q.

Řešení:

$$s_6=a_1\frac{1-q^6}{1-q}=9a_1\frac{1-q^3}{1-q}=9s_3$$

Po úpravě:

$$\frac{1-q^6}{1-q}=9\frac{1-q^3}{1-q}$$

$$1-q^6=9\left(1-q^3\right)$$

$$1-q^6=9-9q^3$$

$$-q^6+9q^3-8=0\Rightarrow q^6-9q^3+8=0$$

Rovnici řešíme pomocí substituce $q^3=u$

$$u^2-9u+8=0\Rightarrow D=81-32=49, \sqrt{D}=7$$

$$u_{1,2}=\frac{9\pm 7}{2}\Rightarrow u_1=8, u_2=1$$

Návratem k substituci získáme kořeny původní rovnice:

$$q^3=8\Rightarrow q_1=2$$

$$q^3=1\Rightarrow q_1=1$$

$$q^3=8\Longrightarrow q_1=2$$

$$q^3=1\Longrightarrow q_2=1$$

Druhý kořen však nevyhovuje podmínce $q\neq 1$. Jediným kořenem je tedy:

$q=2$.

Hodnota prvního členu posloupnosti pak může nabývat:

$a_1\in R-\{0\}$.

36. První dva členy aritmetické posloupnosti jsou $a_1=57, a_2=54$.

a) Vypočítejte šedesátý člen posloupnosti.
b) Vypočítejte součet prvních 40 členů posloupnosti.
c) Kolik prvních členů posloupnosti je potřeba sečíst aby byl součet roven 462?

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

Nejdříve vypočítáme diferenci aritmetické posloupnosti:

$d = a_2 - a_1 = 54 - 57 = -3$

Pro šedesátý člen posloupnosti platí:

$a_{60} = a_1 + 59d = 57 - 59 \cdot 3 = -120$

Pro součet prvních 40 členů aritmetické posloupnosti je potřeba nejdříve vypočítat čtyřicátý člen posloupnosti:

$a_{40} = a_1 + 39d = 57 - 39 \cdot 3 = -60$

Pro součet pak platí:

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \Rightarrow s_{40} = \frac{40}{2}\left(57 - 60\right) = -60$$

Pro výpočet počtu členů, které je potřeba sečíst vyjdeme opět ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_1 + \left(n-1\right)d\right)$$

$$462 = \frac{n}{2}\left(57 + 57 + \left(n-1\right)\left(-3\right)\right) = \frac{n}{2}\left(117 - 3n\right)$$

$$924 = 117n - 3n^2$$

$$3n^2 - 117n + 924 = 0 \Rightarrow D = 13689 - 11088 = 2601$$

$$\sqrt{D} = 51 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{117 \pm 51}{6} \Rightarrow n_1 = 28, n_2 = 11$$

Součet prvních 11, respektive prvních 28 členů je roven 462.

37. Dva členy aritmetické posloupnosti jsou $a_3 = -34, a_{10} = -20$.

a) Vypočítejte dvacátý člen posloupnosti.
b) Vypočítejte součet prvních 50 členů posloupnosti.
c) Kolik prvních členů posloupnosti je potřeba sečíst aby byl součet roven -360.

Řešení:

Nejdříve vypočítáme diferenci aritmetické posloupnosti

$a_{10} = a_3 + 7d \Rightarrow 7d = a_{10} - a_3 = -20 + 34 = 14 \Rightarrow d = 2$

Pro dvacátý člen posloupnosti platí:

$a_{20} = a_3 + 17d = -34 + 17 \cdot 2 = 0$

Pro součet prvních 50 členů aritmetické posloupnosti je potřeba nejdříve vypočítat první a padesátý člen posloupnosti

$a_1 = a_3 - 2d = -37 - 2 \cdot 2 = -41$

$a_{50} = a_{20} + 30d = 0 + 30 \cdot 2 = 60$

Pro součet pak platí:

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \Rightarrow s_{50} = \frac{50}{2}\left(-41 + 60\right) = 475$$

Pro výpočet počtu členů, které je potřeba sečíst vyjdeme opět ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$-360 = \frac{n}{2}(-41 - 41 + (n-1)(2)) = \frac{n}{2}(-84 + 2n)$$

$$-720 = -84n + 2n^2$$

$$2n^2 - 84n + 720 = 0 \Rightarrow D = 7056 - 5760 = 1296$$

$$\sqrt{D} = 36 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{84 \pm 36}{4} \Rightarrow n_1 = 30, n_2 = 12$$

Součet prvních 30, respektive prvních 12 členů je roven -360.

38. Dva členy aritmetické posloupnosti jsou $a_{16} = 12, a_{22} = 78$.
   a) Vypočítejte stý člen posloupnosti.
   b) Vypočítejte součet prvních 1000 členů posloupnosti.
   c) Kolik prvních členů posloupnosti je potřeba sečíst aby byl součet roven 10290?

Řešení:

Nejdříve vypočítáme diferenci aritmetické posloupnosti:

$$a_{22} = a_{16} + 6d \Rightarrow 6d = a_{22} - a_{16} = 78 - 12 = 66 \Rightarrow d = 11$$

Pro stý člen posloupnosti platí:

$$a_{100} = a_{22} + 78d = 78 + 78 \cdot 11 = 936$$

Pro součet prvních 1000 členů aritmetické posloupnosti je potřeba nejdříve vypočítat první a tisící člen posloupnosti:

$$a_1 = a_{16} - 15d = 12 - 15 \cdot 11 = -153$$

$$a_{1000} = a_1 + 999d = -153 + 999 \cdot 11 = 10836$$

Pro součet pak platí:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow s_{1000} = \frac{1000}{2}(-153 + 10836) = 5341500$$

Pro výpočet počtu členů, které je potřeba sečíst vyjdeme opět ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$10290 = \frac{n}{2}(-153 - 153 + (n-1)(11)) = \frac{n}{2}(-317 + 11n)$$

$$20580 = -317n + 11n^2$$

$$11n^2 - 317n - 20580 = 0 \Rightarrow D = 100489 + 905520 = 1006009$$

$$\sqrt{D} = 1003 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{317 \pm 1003}{11} \Rightarrow n_1 = 120, n_2 = -\frac{686}{11}$$

Druhý kořen kvadratické rovnice nemá smysl, neboť $n \notin N$. Součet prvních 120 členů posloupnosti je roven 10290.

39. Dva členy aritmetické posloupnosti jsou $a_8 = -14, a_{20} = -8$.
   a) Vypočítejte třicátý člen posloupnosti.
   b) Vypočítejte součet prvních 15 členů posloupnosti.
   c) Kolik prvních členů posloupnosti je potřeba sečíst aby byl součet roven -255?

Řešení:

Nejdříve vypočítáme diferenci aritmetické posloupnosti:

$$a_{20}=a_8+12d\Rightarrow 12d=a_{20}-a_8=-8+14=6\Rightarrow d=\frac{1}{2}$$

Pro třicátý člen posloupnosti platí:

$$a_{30}=a_{20}+10d=-8+10\cdot\frac{1}{2}=-3$$

Pro součet prvních 15 členů aritmetické posloupnosti je potřeba nejdříve vypočítat první a patnáctý člen posloupnosti:

$$a_1=a_8-7d=-14-7\cdot\frac{1}{2}=-17,5$$

$$a_{15}=a_1+14d=-17,5+14\cdot\frac{1}{2}=-10,5$$

Pro součet pak platí

$$s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow s_{15}=\frac{15}{2}(-17,5-10,5)=-210$$

Pro výpočet počtu členů, které je potřeba sečíst vyjdeme opět ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\left(a_1+a_1+(n-1)d\right)$$

$$-255=\frac{n}{2}\left(-17,5-17,5+(n-1)\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{2}(-35,5+0,5n)$$

$$-510=-35,5n+0,5n^2\Rightarrow -1020=-71n+n^2$$

$$n^2-71n+1020=0\Rightarrow D=5041-4080=961$$

$$\sqrt{D}=31\Rightarrow n_{1,2}=\frac{71\pm 31}{2}\Rightarrow n_1=101, n_2=20$$

Součet prvních 20, respektive prvních 101 členů je roven -255.

40. Dva členy aritmetické posloupnosti jsou $a_9=-7, a_{17}=\frac{13}{3}$.

a) Vypočítejte třináctý člen posloupnosti
b) Vypočítejte součet prvních dvaceti členů posloupnosti
c) Kolik prvních členů posloupnosti je potřeba sečíst aby byl součet roven $-\frac{767}{6}$.

Řešení:

Nejdříve vypočítáme diferenci aritmetické posloupnosti:

$$a_{17}=a_9+8d\Rightarrow 8d=a_{17}-a_9=\frac{13}{3}+7=\frac{34}{3}\Rightarrow d=\frac{17}{12}$$

Pro třináctý člen posloupnosti platí:

$$a_{13}=a_9+4d=-7+4\cdot\frac{17}{12}=-\frac{4}{3}$$

Pro součet prvních 20 členů aritmetické posloupnosti je potřeba nejdříve vypočítat první a dvacátý člen posloupnosti:

$$a_1 = a_9 - 8d = -7 - 8\cdot\frac{17}{12} = -\frac{55}{3}$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = -\frac{55}{3} + 19\cdot\frac{17}{12} = \frac{103}{12}$$

Pro součet pak platí:

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \Rightarrow s_{20} = \frac{20}{2}\left(-\frac{55}{3} + \frac{103}{12}\right) = -\frac{195}{2}$$

Pro výpočet počtu členů, které je potřeba sečíst, vyjdeme opět ze vzorce pro součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_1 + (n-1)d\right)$$

$$-\frac{767}{6} = \frac{n}{2}\left(-\frac{55}{3} - \frac{55}{3} + (n-1)\frac{17}{12}\right) = \frac{n}{2}\left(-\frac{110}{3} + \frac{17}{12}n - \frac{17}{12}\right) = \frac{n}{2}\left(-\frac{457}{12} + \frac{17}{12}n\right)$$

$$-767 = -\frac{457}{4}n + \frac{17}{4}n^2 \Rightarrow -3068 = -457n + 17n^2$$

$$17n^2 - 457n + 3068 = 0 \Rightarrow D = 208849 - 208624 = 225$$

$$\sqrt{D} = 15 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{457 \pm 15}{34} \Rightarrow n_1 = \frac{236}{17}, n_2 = 13$$

Součet prvních 13 členů posloupnosti je roven $-\dfrac{767}{6}$, neboť první kořen nedává smysl.

41. Dva členy geometrické posloupnosti jsou $a_1 = 5, a_2 = 25$.
   a) Vypočítejte sedmý člen posloupnosti
   b) Vypočítejte součet prvních 5 členů posloupnosti
   c) Kolik prvních členů posloupnosti je potřeba sečíst aby byl součet roven 12207030.

Řešení:

Nejdříve vypočítáme kvocient geometrické posloupnosti:

$$a_2 = a_1 q \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{25}{5} = 5$$

Pro sedmý člen posloupnosti platí:

$$a_7 = a_1 q^6 = 5\cdot 5^6 = 78125$$

Pro součet prvních 5 členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow s_5 = 5\frac{5^5 - 1}{5 - 1} = 5\frac{3124}{4} = 3905$$

Pro výpočet počtu členů, které je potřeba sečíst vyjdeme opět ze vzorce pro součet prvních n-členů geometrické posloupnosti:

$$s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$12207030 = 5\frac{5^n - 1}{5 - 1}$$

$$48828120 = 5\left(5^n - 1\right)$$

$$9765624 = \left(5^n - 1\right) \Rightarrow 5^n = 9765625$$

$$n = \log_5 9765625$$

$$n = 10$$

Součet prvních 10 členů geometrické posloupnosti je roven 12207030.

42. Dva členy geometrické posloupnosti jsou $a_2 = 12, a_5 = \frac{3}{2}$.

a) Vypočítejte desátý člen posloupnosti.
b) Vypočítejte součet prvních 8 členů posloupnosti.
c) Kolik prvních členů posloupnosti je potřeba sečíst aby byl součet roven 45?

Řešení:

Nejdříve vypočítáme kvocient geometrické posloupnosti a první člen:

$$a_5 = a_2 q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{3}{2}}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

Pro desátý člen posloupnosti platí:

$$a_{10} = a_2 q^8 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{12}{256} = \frac{3}{64}$$

Pro součet prvních 8 členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow s_8 = 24 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 24 \frac{\frac{1}{256} - 1}{-\frac{1}{2}} = -48 \frac{-255}{256} = \frac{12240}{256} = \frac{765}{16}$$

Pro výpočet počtu členů, které je potřeba sečíst vyjdeme opět ze vzorce pro součet prvních *n*-členů geometrické posloupnosti:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$45 = 24 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$-\frac{45}{2} = 24\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$

$$-45 = 48\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$

$$-\frac{45}{48} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$n = 4$$

Součet prvních 4 členů geometrické posloupnosti je roven 45.

43. Dva členy geometrické posloupnosti jsou $a_5 = 1, a_7 = 4$.

a) vypočítejte sedmý člen posloupnosti
b) vypočítejte součet prvních 10 členů posloupnosti

Řešení:

Nejdříve vypočítáme kvocient geometrické posloupnosti a první člen:

$$a_7 = a_5 q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{a_7}{a_5} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow q = \sqrt{4} \Rightarrow q = 2, q' = -2$$

$$a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$a_1' = \frac{a_5}{q'^4} = \frac{1}{-2^4} = \frac{1}{16}$$

Pro sedmý člen posloupnosti platí:

$$a_7 = a_5 q^2 = 1 \cdot (2)^2 = 4, a_7' = a_5 q'^2 = 1 \cdot (-2)^2 = 4$$

Pro součet prvních 10 členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow s_{10} = \frac{1}{16} \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1}{16} 1023 = 64$$

$$s_{10}' = \frac{1}{16} \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = \frac{1}{16} \frac{1023}{-3} = \frac{1}{16}(-341) = -\frac{341}{16}$$

44. Dva členy geometrické posloupnosti jsou $a_3 = 5, a_6 = -\frac{5}{27}$.

a) vypočítejte čtvrtý člen posloupnosti
b) vypočítejte součet prvních 12 členů posloupnosti

Řešení:

Nejdříve vypočítáme kvocient geometrické posloupnosti a první člen:

$$a_6 = a_3 q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{-\frac{5}{27}}{5} = -\frac{5}{27}\frac{1}{5} = -\frac{1}{27} \Rightarrow q = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{5}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{5}{\frac{1}{9}} = 45$$

Pro čtvrtý člen posloupnosti platí:

$$a_4 = a_1 q^3 = 45 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{45}{27} = -\frac{5}{3}$$

Pro součet prvních 12 členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow s_{12} = 45 \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{12} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} = 45 \frac{\frac{1}{531441} - 1}{-\frac{4}{3}} = 45 \frac{-\frac{531440}{531441}}{-\frac{4}{3}} = \frac{71744400}{2125764} = 33,75$$

45. Dva členy geometrické posloupnosti jsou $a_2 = -2, a_7 = -18\sqrt{3}$.
   a) vypočítejte patnáctý člen posloupnosti
   b) vypočítejte součet prvních 17 členů posloupnosti

Řešení:
Nejdříve vypočítáme kvocient geometrické posloupnosti a první člen:

$$a_7 = a_2 q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{a_7}{a_2} = \frac{-18\sqrt{3}}{-2} = 9\sqrt{3} \Rightarrow q = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt[5]{\sqrt{243}} = \sqrt{3}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

Pro patnáctý člen posloupnosti platí:

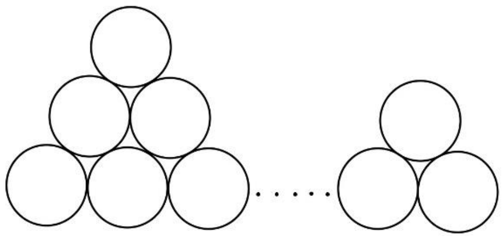
$$a_{15} = a_1 q^{14} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{14} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 2187 = -\frac{4374\sqrt{3}}{3} = -1458\sqrt{3}$$

Pro součet prvních 17 členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1} \Rightarrow s_{17} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{17} - 1}{\sqrt{3}-1} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{6561\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$s_{17} = \frac{-39366 + 2\sqrt{3}}{3\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{-39366+2\sqrt{3}}{6} = -6561 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

46. Klády skládáme na sebe do 12 vrstev (viz obrázek). Poslední vrstva obsahuje 120 klád. Kolik klád můžeme takto naskládat na sebe?



Řešení: Z obrázku je vidět, že poslední vrstva klád má 120 kusů, předposlední vrstva 119 kusů, atd. Jedná se tedy o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 1$. Počet členů této posloupnosti je 12, jelikož se klády skládají do 12 řad. Řešíme tedy součet prvních 12 členů aritmetické posloupnosti, pro kterou platí:

$a_{12} = 120, d = 1$

Pro první člen posloupnosti platí:

$a_1 = a_{12} - 11d = 120 - 11 = 109$

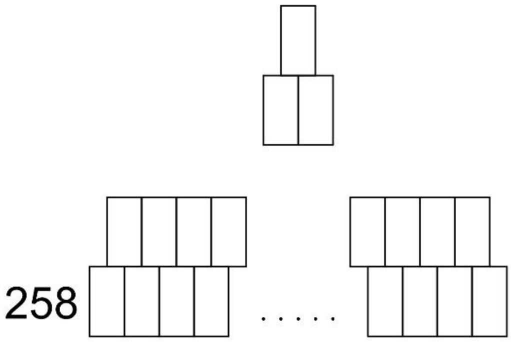
Pro součet prvních 12 členů je pak:

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \Rightarrow s_{12} = \frac{12}{2}\left(109+120\right) = 1374$$

Celkový počet klád je 1374.

evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

47. Střecha má tvar čtyřbokého jehlanu se čtvercovou základnou. Počet střešních tašek, které se nachází na základně jednoho ze čtyř trojúhelníků, je 258. V každé následující řadě je o jednu tašku méně. Vypočítejte počet řad střešních tašek a celkový počet tašek na střeše.



Řešení: Z obrázku je vidět, že poslední vrstva střešních tašek má 258 kusů, předposlední vrstva 257 kusů, atd. Jedná se tedy o aritmetickou posloupnost s diferencí d = 1. Počet členů této posloupnosti je n, jelikož jsou tašky poskládány do n řad. Pro tuto posloupnost platí:

$a_1 = 1, a_n = 258, d = 1$

Mezi prvním a n tým členem platí:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 258 = 1 + (n-1)1$$
$$258 = 1 + n - 1 = n$$

Jak bylo zřejmé již z obrázku, počet řad tašek je roven 258.

Pro součet prvních 258 členů je pak:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow s_{258} = \frac{258}{2}(1+258) = 33411$$

Jelikož je střecha tvořena čtyřmi takovými trojúhelníky, je celkový počet tašek na střechu roven:

$x = 4 \cdot 33411 = 133644$.

48. Aritmetická posloupnost je dána vzorcem pro n – tý člen $a_n = \frac{1}{4}(3-2n)$. Vypočítejte a_1, d. Dále vypočítejte součet prvních deseti členů a součet druhých deseti členů posloupnosti.

Řešení:

Pro první člen posloupnosti platí:

$$a_1 = \frac{1}{4}(3-2) = \frac{1}{4}$$

Diferenci aritmetické posloupnosti vypočítáme z prvního a druhého členu posloupnosti:

$$a_2 = \frac{1}{4}(3-4) = -\frac{1}{4} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Pro součet prvních deseti členů posloupnosti platí:

$$a_{10} = a_1 + 9d = \frac{1}{4} + 9\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{9}{2} = \frac{1}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{17}{4}$$

$$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5\left(\frac{1}{4} - \frac{17}{4}\right) = 5 \cdot \frac{-16}{4} = -20$$

Pro součet druhých deseti členů je potřeba vypočítat dvacátý člen posloupnosti:

$$a_{20} = a_1 + 19d = \frac{1}{4} + 19\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{19}{2} = \frac{1}{4} - \frac{38}{4} = -\frac{37}{4}$$

$$s_{10-20} = \frac{10}{2}\left(a_{10} + a_{20}\right) = 5\left(-\frac{17}{4} - \frac{37}{4}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{54}{4}\right) = -\frac{135}{2}$$

49. Určete, jakou podmínku musí splňovat první člen aritmetické posloupnosti s diferencí d = 5, aby platilo $s_{20} \geq 1000$.

Řešení: Pro součet aritmetické posloupnosti platí, že

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$$

$$1000 \leq \frac{n}{2}\left(a_1 + a_1 + (n-1)d\right)$$

$$1000 \leq \frac{20}{2}\left(2a_1 + (20-1)5\right)$$

$$1000 \leq 10\left(2a_1 + 95\right)$$

$$1000 \leq 20a_1 + 950$$

$$20a_1 \geq 50$$

$$a_1 \geq \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$$

Pro první člen takto zadané aritmetické posloupnosti platí uvedená nerovnost, tedy: $a_1 \geq \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$.

50. Určete součet všech přirozených čísel, která vyhovují nerovnici $\left(12x + \frac{2}{3}\right) \cdot 5 - \frac{5x-15}{3} < 50(x+10)$.

Řešení: Nejdříve vyřešíme tuto nerovnici:

$$\left(12x + \frac{2}{3}\right) \cdot 5 - \frac{5x-15}{3} < 50(x+10)$$

$$60x + \frac{10}{3} - \frac{5x-15}{3} < 50x + 500 \, / .3$$

$$180x + 10 - 5x + 15 < 150x + 1500$$

$$25x < 1475$$

$$x < 59$$

První člen posloupnosti je tedy $a_1 = 1$, poslední člen posloupnosti $a_{58} = 58$. Diference této aritmetické posloupnosti je d = 1. Pro součet platí, že $s_{58} = \frac{58}{2}(1+58) = 1711$.

51. Určete součet všech sudých čísel, která vyhovují nerovnici $x^2-53x+150\le 0$.

Řešení: Nejdříve vyřešíme příslušnou nerovnici:

$x^2-53x+150\le 0\Rightarrow D=2809-600=2209$

$\sqrt{D}=47\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{53\pm 47}{2}\Rightarrow x_1=50, x_2=3$

Kvadratický trojčlen rozložíme na tvar $\left(x-50\right)\left(x-3\right)\le 0$

Pokud si uvědomíme, že graf kvadratické funkce $f\left(x\right)=x^2-53x+150$ protíná osu x v bodech 3 a 50 a ve svém vrcholu nabývá minima je zřejmé, že této nerovnici vyhovují $x\in\left\langle 3,50\right\rangle$.

Nejmenší sudé číslo z tohoto intervalu je prvním členem posloupnosti $a_1=4$, poslední člen posloupnosti $a_{24}=50$. Počet všech sudých čísel v tomto intervalu je 24. Pro součet pak platí:

$s_{28}=\dfrac{28}{2}\left(4+50\right)=756$.

52. Poločas rozpadu jader izotopu ^{223}Fr je 22 minut. Kolik tohoto izotopu zůstane bez přeměny z 1 mg po 11 hodinách?

Řešení: Z 1 mg radioaktivního izotopu francia zbude za 22 minut 0,5 mg. Za dalších 22 minut to bude:

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ mg

Za dalších 22 minut:

$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ mg

Číselné hodnoty hmotnosti radioaktivního izotopu tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1=1$ a kvocientem $q=\dfrac{1}{2}$. Poločas rozpadu (22 minut) je v 11 hodinách obsažen třicetkrát. Znamená to, že posledním členem této geometrické posloupnosti bude člen a_{30}. Platí:

$a_{30}=a_1q^{29}=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{29}=1{,}863\cdot 10^{-9}$ mg

Po 11 hodinách zbyde z radioaktivního izotopu francia $1{,}863\cdot 10^{-9}$ mg.

53. Poločas rozpadu jader izotopu ^{60}Co je 5,27 let. Kolik tohoto izotopu zůstane bez přeměny ze 100 mg po 1054 letech?

Řešení: Ze 100 mg radioaktivního izotopu kobaltu zbude za 5,27 let 50 mg. Za dalších 5,27 let to bude:

$50\cdot\dfrac{1}{2}=25$ mg

Za dalších 5,27 let

$25\cdot\dfrac{1}{2}=12{,}5$ mg

Číselné hodnoty hmotnosti radioaktivního izotopu tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 100$ a kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Poločas rozpadu (5,27 let) je v 1054 letech obsažen dvěstěkrát. Znamená to, že posledním členem této geometrické posloupnosti bude člen a_{200}. Platí:

$$a_{200} = a_1 q^{199} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{199} = 1{,}245 \cdot 10^{-58} \text{ mg}$$

Po 1054 letech zbyde z radioaktivního izotopu francia $1{,}863 \cdot 10^{-9}$ mg.

54. Poločas rozpadu jader izotopu ^{223}Th je 0,9 sekund. Kolik tohoto izotopu zůstane bez přeměny z 1 kg po 3 minutách?

Řešení: Z 1 kg radioaktivního izotopu thoria zbude za 0,9 s 500 mg. Za dalších 0,9 s to bude:

$$500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \text{ mg}$$

Za dalších 0,9 s

$$250 \cdot \frac{1}{2} = 125 \text{ mg}$$

Číselné hodnoty hmotnosti radioaktivního izotopu tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 1000$ a kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Poločas rozpadu (0,9 s) je ve 3 minutách, tedy ve 180 sekundách obsažen dvěstěkrát. Znamená to, že posledním členem této geometrické posloupnosti bude člen a_{200}. Platí:

$$a_{200} = a_1 q^{199} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{199} = 1{,}245 \cdot 10^{-57} \text{ mg}$$

Po 1054 letech zbyde z radioaktivního izotopu francia $1{,}245 \cdot 10^{-57}$ mg.

13.1 Limita posloupnosti

1. Určete limitu dané posloupnosti. Rozhodněte, zda se jedná o posloupnost konvergentní nebo divergentní.

a) $\left(\frac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $(5)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\frac{4n-3}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(3^n\right)_{n=1}^{\infty}$

e) $\left(\frac{5n^2-2n+3}{3n^2+n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$

f) $\left(\frac{n^2-2n+3}{7n^2+5}\right)_{n=1}^{\infty}$

g) $\left(\frac{8n^5-5n^3+1}{3n^5+2n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$

h) $\left(\frac{5n^6-4n^7+5n}{5n^2+2n^7}\right)_{n=1}^{\infty}$

i) $\left(\sqrt{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

j) $\left(\log n^2\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $\left(\frac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Posloupnost $\left(\frac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity 0 a tedy je konvergentní.

b) $(5)_{n=1}^{\infty}$

Jedná se o posloupnost konstantní. Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}5=5$$

Posloupnost $(5)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity 5 a tedy je konvergentní.

c) $\left(\frac{4n-3}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{3n}-\frac{3}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{4}{3}-0=\frac{4}{3}$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Posloupnost $\left(\frac{4n-3}{3n}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity $\frac{4}{3}$ a tedy je konvergentní.

d) $\left(3^n\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$$

Neboť je zřejmé, že se hodnoty členů posloupnosti budou neustále zvyšovat.

Posloupnost $\left(3^n\right)_{n=1}^{\infty}$ má tedy nevlastní limitu pro $n\to\infty$ a to ∞. Jedná se tedy o posloupnost divergentní.

e) $\left(\frac{5n^2-2n+3}{3n^2+n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti tak, že vydělíme, každý člen ve vyjádření *n*-tého členu, *n* s největším exponentem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2n+3}{3n^2+n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\frac{n^2}{n^2}-2\frac{n}{n^2}+3\frac{1}{n}}{3\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-2\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5-2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}-2\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Posloupnost $\left(\frac{5n^2-2n+3}{3n^2+n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity $\frac{5}{3}$ a tedy je konvergentní.

f) $\left(\frac{n^2-2n+3}{7n^2+5}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti tak, že vydělíme, každý člen ve vyjádření *n*-tého členu, *n* s největším exponentem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{7n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-2\frac{n}{n^2}+3\frac{1}{n}}{7\frac{n^2}{n^2}+5\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n}}{7+5\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Posloupnost $\left(\frac{n^2-2n+3}{7n^2+5}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity $\frac{1}{7}$ a tedy je konvergentní.

g) $\left(\frac{8n^5-5n^3+1}{3n^5+2n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti tak, že vydělíme, každý člen ve vyjádření *n*-tého členu, *n* s největším exponentem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^5-5n^3+1}{3n^5+2n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{8\frac{n^5}{n^5}-5\frac{n^3}{n^5}+\frac{1}{n^5}}{3\frac{n^5}{n^5}+2\frac{n}{n^5}-2\frac{1}{n^5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{8-5\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}}{3+2\frac{1}{n^4}-2\frac{1}{n^5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0, k\in N$$

Posloupnost $\left(\dfrac{8n^5-5n^3+1}{3n^5+2n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity $\dfrac{8}{3}$ a tedy je konvergentní.

h) $\left(\dfrac{5n^6-4n^7+5n}{5n^2+2n^7}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti tak, že vydělíme, každý člen ve vyjádření n-tého členu, n s největším exponentem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^6-4n^7+5n}{5n^2+2n^7}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\frac{n^6}{n^7}-4\frac{n^7}{n^7}+5\frac{n}{n^7}}{5\frac{n^2}{n^7}+2\frac{n^7}{n^7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\frac{1}{n}-4+5\frac{1}{n^6}}{5\frac{1}{n^5}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{2}=-2$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0, k\in N$$

Posloupnost $\left(\dfrac{5n^6-4n^7+5n}{5n^2+2n^7}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity -2 a tedy je konvergentní.

i) $\left(\sqrt{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Z několika prvních hodnot členů posloupnosti

$\sqrt{3}, \sqrt{4}=2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}...$

vyplývá, že se jedná o posloupnost rostoucí a shora neomezená. Platí tedy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}=\infty.$$

Posloupnost $\left(\sqrt{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ má tedy nevlastní limitu pro $n\to\infty$ a to ∞. Jedná se tedy o posloupnost divergentní.

j) $\left(\log n^2\right)_{n=1}^{\infty}$

Uvědomíme-li si, že funkce

$f(x)=\log x$

je funkcí rostoucí, pak také daná posloupnost musí být posloupností rostoucí. Z této informace a z hodnot prvních členů posloupností

$\log 1=0,\ \log 2=0,3,\ \log 3=0,48,\ \log 4=0,6$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log n^2\right)=\infty$$

Posloupnost $\left(\log n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ má tedy nevlastní limitu pro $n\to\infty$ a to ∞. Jedná se tedy o posloupnost divergentní.

2. Určete limitu dané posloupnosti. Rozhodněte, zda se jedná o posloupnost konvergentní nebo divergentní.

a) $\left(\dfrac{2-(6n-1)}{3(2n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\dfrac{2-3^n}{2\cdot 3^n-5}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\sqrt[n]{5}-15\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(\dfrac{2+5^{-n}+3^{-n}}{2n+5-n4^{-n}}\right)_{n=1}^{\infty}$

e) $\left(7^{(n-3)(2n+5)}\right)_{n=1}^{\infty}$

f) $\left(\dfrac{5^n-2^n}{3^n-8^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

g) $\left(\left(2+\dfrac{5}{n}\right)\left(3+\dfrac{7}{2n^2}\right)\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

h) $\left(\dfrac{3n^3+5}{4-n^3}\left(2-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3n-1}{5n^3+2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

i) $\left(\dfrac{2^n-3^n}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

j) $\left(n^2-5n-1\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $\left(\dfrac{2-(6n-1)}{3(2n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypočítáme limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-(6n-1)}{3(2n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-6n+1}{6n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-6n}{6n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(1-2n)}{3(2n+1)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}-2\frac{n}{n}}{2\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}-2}{2+\frac{1}{n}}\right)=\frac{0-2}{2+0}=-1$$

neboť platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

Posloupnost $\left(\dfrac{2-(6n-1)}{3(2n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity -1 a tedy je konvergentní.

b) $\left(\dfrac{2-3^n}{2\cdot 3^n-5}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti tak, že vydělíme, každý člen ve vyjádření n-tého členu 3^n.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-3^n}{2\cdot 3^n-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{3^n}-\frac{3^n}{3^n}}{2\frac{3^n}{3^n}-\frac{5}{3^n}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{3^n}-1}{2-\frac{5}{3^n}}\right)=\frac{0-1}{2-0}=-\frac{1}{2}$$

neboť platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0,\ a\in N$

Posloupnost $\left(\dfrac{2-3^n}{2\cdot 3^n-5}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity $-\dfrac{1}{2}$ a tedy je konvergentní.

c) $\left(\sqrt[n]{5}-15\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}-15\right)=\lim_{n\to\infty}\left(5^{\frac{1}{n}}-15\right)=5^{0}-15=0-15=-15$$

neboť platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

Posloupnost $\left(\sqrt[n]{5}-15\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity -15 a tedy je konvergentní.

d) $\left(\dfrac{2+5^{-n}+3^{-n}}{2n+5-n4^{-n}}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+5^{-n}+3^{-n}}{2n+5-n4^{-n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{5^{n}}+\frac{1}{3^{n}}}{2n+5-n\frac{1}{4^{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+0+0}{2n+5-0}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{2\frac{n}{n}+\frac{5}{n}}=\frac{0}{2+0}=0$$

neboť platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^{n}}=0,\ a\in N$

Posloupnost $\left(\dfrac{2+5^{-n}+3^{-n}}{2n+5-n4^{-n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity 0 a tedy je konvergentní.

e) $\left(7^{(n-3)(2n+5)}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(7^{(n-3)(2n+5)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(7^{2n^{2}+5n-6n-15}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(7^{2n^{2}-n-15}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(7^{2\frac{n^{2}}{n^{2}}-\frac{n}{n^{2}}-\frac{15}{n^{2}}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}7^{2-\frac{1}{n}-\frac{15}{n^{2}}}=7^{2-0-0}=49$$

neboť platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{k}}=0,\ k\in N$

Posloupnost $\left(7^{(n-3)(2n+5)}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity 49 a tedy je konvergentní.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

f) $\left(\dfrac{5^n-2^n}{3^n-8^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti tak, že vydělíme, každý člen ve vyjádření n-tého členu 8^n.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5^n-2^n}{3^n-8^n}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5^n}{8^n}-\frac{2^n}{8^n}}{\frac{3^n}{8^n}-\frac{8^n}{8^n}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^n-\left(\frac{2}{8}\right)^n}{\left(\frac{3}{8}\right)^n-1}=\frac{0-0}{0-1}=0$$

Posloupnost $\left(\dfrac{5^n-2^n}{3^n-8^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity 0 a tedy je konvergentní.

g) $\left(\left(2+\dfrac{5}{n}\right)\left(3+\dfrac{7}{2n^2}\right)\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(2+\frac{5}{n}\right)\left(3+\frac{7}{2n^2}\right)\left(\frac{2}{n^2}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{7}{2n^2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}-1\right)=$$

$$=(2+0)(3+0)(0-1)=-6$$

neboť platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0,\ k\in N$

Posloupnost $\left(\left(2+\dfrac{5}{n}\right)\left(3+\dfrac{7}{2n^2}\right)\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity -6 a tedy je konvergentní.

h) $\left(\dfrac{3n^3+5}{4-n^3}\left(2-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3n-1}{5n^3+2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+5}{4-n^3}\left(2-\frac{5}{n^2}+\frac{3n-1}{5n^3+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+5}{4-n^3}\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{5}{n^2}+\frac{3n-1}{5n^3+2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{n^3}{n^3}+\frac{5}{n^3}}{\frac{4}{n^3}-\frac{n^3}{n^3}}\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{5}{n^2}+\frac{3\frac{n}{n^3}-\frac{1}{n^3}}{5\frac{n^3}{n^3}+\frac{2}{n^3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^3}}{\frac{4}{n^3}-1}\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{5}{n^2}+\frac{3\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n^3}}\right)=$$

$$=\frac{3+0}{0-1}\left(2-0+\frac{0-0}{5+0}\right)=-3\cdot 2=-6$$

neboť platí, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0,\ k\in N$

Posloupnost $\left(\dfrac{3n^3+5}{4-n^3}\left(2-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3n-1}{5n^3+2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity -6 a tedy je konvergentní.

i) $\left(\dfrac{2^n-3^n}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}-\frac{3^n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\lim_{n\to\infty}1=0-1=-1$$

Posloupnost $\left(\dfrac{2^n-3^n}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity -1 a tedy je konvergentní.

j) $\left(n^2-5n-1\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-5n-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\infty\left(1-0-0\right)=\infty$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim_{n\to\infty}n^k=\infty,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0,k\in N$$

Posloupnost $\left(n^2-5n-1\right)_{n=1}^{\infty}$ má tedy nevlastní limitu pro $n\to\infty$ a to ∞. Jedná se tedy o posloupnost divergentní.

3. Určete limitu dané posloupnosti. Rozhodněte, zda se jedná o posloupnost konvergentní nebo divergentní.

a) $\left(\dfrac{-7n^2+5n+3}{3n+4}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\dfrac{2n+\sin n}{3n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{4n-2}-2\sqrt{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

e) $\left(\dfrac{3n^5-5}{-2n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) $\left(\dfrac{-7n^2+5n+3}{3n+4}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7n^2+5n+3}{3n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2\left(7-5\dfrac{n}{n^2}-3\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(3+4\dfrac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(-n\right)\lim_{n\to\infty}\frac{7-5\dfrac{1}{n}-3\dfrac{1}{n^2}}{3+4\dfrac{1}{n}}=$$

$$=-\infty\cdot\frac{7-0-0}{3+0}=-\infty$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim_{n\to\infty}\left(-n^k\right)=-\infty,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0,k\in N$$

Posloupnost $\left(\dfrac{-7n^2+5n+3}{3n+4}\right)_{n=1}^{\infty}$ má tedy nevlastní limitu pro $n\to\infty$ a to $-\infty$. Jedná se tedy o posloupnost divergentní.

b) $\left(\dfrac{2n+\sin n}{3n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sin n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{n}{n}+\frac{\sin n}{n}}{3\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{\sin n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

Posloupnost $\left(\dfrac{2n+\sin n}{3n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity $\dfrac{2}{3}$ a tedy je konvergentní.

c) $\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti pomocí rozšíření zlomkem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+2\frac{n}{n^2}}+\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+2\frac{1}{n}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{2}{2}=1$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Posloupnost $\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity 1 a tedy je konvergentní.

d) $\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{4n-2}-2\sqrt{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti pomocí rozšíření zlomkem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{4n-2}-2\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-2n}-2n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-2n}-2n\right)\frac{\sqrt{4n^2-2n}+2n}{\sqrt{4n^2-2n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2-2n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2-2n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2-2n}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2-2n}\right)^2-\left(2n\right)^2}{\sqrt{4n^2-2n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n-4n^2}{\sqrt{4n^2-2n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{4n^2-2n}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\frac{n}{n}}{\sqrt{4\frac{n^2}{n^2}-2\frac{n}{n^2}}+2\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-2\frac{1}{n}}+2}=\frac{-2}{\sqrt{4-0}+2}=\frac{-2}{2+2}=-\frac{1}{2}$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Posloupnost $\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{4n-2}-2\sqrt{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ má hodnotu limity $-\frac{1}{2}$ a tedy je konvergentní.

e) $\left(\frac{3n^5-5}{-2n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$

Nejdříve vypočítáme příslušnou limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-5}{-2n^2}=-\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}n^3+\frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{3}{2}(\infty)+\frac{5}{2}\cdot 0=-\infty$$

neboť platí:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-n^k\right)=-\infty,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0, k\in N$$

Posloupnost $\left(\frac{3n^5-5}{-2n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ má tedy nevlastní limitu pro $n\to\infty$ a to $-\infty$. Jedná se tedy o posloupnost divergentní.

13. Řady

13.1 Nekonečná geometrická řada

1. Danou nekonečnou geometrickou řadu zapište pomocí sumy.

a) $5+25+125+625+\dots$

b) $3-9+27-81+\dots$

c) $y+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}y+\dots$

d) $y^2-\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{9}y^6-\frac{1}{27}y^8+\dots$

e) $x^2+x^3y+x^4y^2+x^5y^3+\dots$

f) $-1+\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}-4+\dots$

g) $\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{27}+\frac{2}{243}\sqrt{2}+\dots$

h) $\frac{\sqrt{5}}{7}+\frac{5}{7\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{5}}{49}+\frac{25}{49\sqrt{7}}+\dots$

i) $-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4}-\dots$

j) $3xy^2+27x^3y^4+243x^5y^6+\dots$

Řešení:

a) $5+25+125+625+\dots$

Jelikož se jedná o mocniny čísla 5, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$5+25+125+625+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}5^n\ .$$

b) $3-9+27-81+\dots$

Jelikož se jedná o mocniny čísla 3, u kterých se střídá znaménko lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$3-9+27-81+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^n\ .$$

c) $y+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}y+\dots$

Jelikož se jedná o mocniny čísla $\frac{1}{2}$ vynásobené neznámou y, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$y+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}y+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}y\ .$$

d) $y^2-\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{9}y^6-\frac{1}{27}y^8+\dots$

Jelikož se jedná o mocniny čísla $\frac{1}{3}$ vynásobené sudými mocninami neznámé y se střídajícími znaménky, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$y^2-\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{9}y^6-\frac{1}{27}y^8+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}y^{2n}\ .$$

e) $x^2+x^3y+x^4y^2+x^5y^3+\dots$

Jelikož se jedná o mocniny výrazů x a y, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$x^2+x^3y+x^4y^2+x^5y^3+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}y^{n-1}\ .$$

f) $-1+\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}-4+\ldots$

Jelikož se jedná o mocniny čísla $\sqrt{2}$ se střídajícími se znaménky, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$-1+\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}-4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}.$$

g) $\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{27}+\frac{2}{243}\sqrt{2}+\ldots$

Jelikož se jedná o mocniny čísla $\sqrt{2}$ vynásobené lichými mocninami čísla $\frac{1}{3}$, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{27}+\frac{2}{243}\sqrt{2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}\left(\sqrt{2}\right)^n.$$

h) $\frac{\sqrt{5}}{7}+\frac{5}{7\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{5}}{49}+\frac{25}{49\sqrt{7}}+\ldots$

Jelikož se jedná o mocniny čísla $\sqrt{5}$ vydělené příslušnými mocninami čísla $\sqrt{7}$, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$\frac{\sqrt{5}}{7}+\frac{5}{7\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{5}}{49}+\frac{25}{49\sqrt{7}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{7}\right)^{n+1}}.$$

i) $-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4}-\ldots$

Jelikož se jedná o záporné mocniny čísla e, respektive kladné mocniny čísla $\frac{1}{e}$ se střídajícími se znaménky, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

j) $3xy^2+27x^3y^4+243x^5y^6+\ldots$

Jelikož se jedná o liché mocniny výrazu $3x$ vynásobené sudými mocninami y, lze danou nekonečnou geometrickou řadu zapsat jako:

$$3xy^2+27x^3y^4+243x^5y^6+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^{2n-1}y^{2n}.$$

2. Danou geometrickou řadu, která je zapsána pomocí sumy, rozepište pomocí součtů. Určete první člen a kvocient.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}4(2x-1)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x-4)^{-n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\frac{1}{x}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+y)^{2n}}{y^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\sqrt[n]{x}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^x}{3}\right)^{n-1}$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1 = x$. Pro kvocient řady platí:

$$q = \frac{x^3}{x} = x^2.$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1 = 1$. Pro kvocient řady platí:

$$q = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4(2x-1)^n$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(2x-1)^n = 4(2x-1) + 4(2x-1)^2 + 4(2x-1)^3 + \dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1 = 4(2x-1)$. Pro kvocient řady platí:

$$q = \frac{4(2x-1)^2}{4(2x-1)} = (2x-1).$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-4)^{-n}$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-4)^{-n} = -\frac{1}{x-4} + \frac{1}{(x-4)^2} - \frac{1}{(x-4)^3} + \dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1 = -\frac{1}{x-4}$. Pro kvocient řady platí:

$$q = \frac{\frac{1}{(x-4)^2}}{-\frac{1}{x-4}} = -\frac{x-4}{(x-4)^2} = -\frac{1}{x-4}.$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \frac{1}{x}$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{2}{x}+\frac{2\sqrt{2}}{x}+\dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1=\frac{1}{x}$. Pro kvocient řady platí:

$$q=\frac{\frac{\sqrt{2}}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{x\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}.$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+y)^{2n}}{y^n}$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+y)^{2n}}{y^n}=\frac{(1+y)^2}{y}+\frac{(1+y)^4}{y^2}+\frac{(1+y)^6}{y^3}+\dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1=\frac{(1+y)^2}{y}$. Pro kvocient řady platí:

$$q=\frac{\frac{(1+y)^4}{y^2}}{\frac{(1+y)^2}{y}}=\frac{(1+y)^4y}{(1+y)^2y^2}=\frac{(1+y)^2}{y}.$$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}=\sqrt{5}+\sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{5}\frac{4}{3}+\sqrt{5}\frac{8}{3\sqrt{3}}+\dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1=\sqrt{5}$. Pro kvocient řady platí:

$$q=\frac{\sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\sqrt[n]{x}$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\sqrt[2n]{x}=\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[6]{x}+\dots=\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log x+\frac{1}{6}\log x+\dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1=\frac{1}{2}\log x$. Pro kvocient řady platí:

$$q=\frac{\frac{1}{4}\log x}{\frac{1}{2}\log x}=\frac{1}{2}.$$

i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^x}{3}\right)^{n-1}$$

Nejdříve řadu rozepíšeme pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^x}{3}\right)^{n-1}=1+\frac{2^x}{3}+\frac{2^{2x}}{9}+\frac{2^{3x}}{27}+\frac{2^{4x}}{81}+\dots$$

První člen nekonečné geometrické řady je $a_1=1$. Pro kvocient řady platí:

$$q=\frac{\frac{2^x}{3}}{1}=\frac{2^x}{3}.$$

3. U dané nekonečné geometrické řady určete první člen a kvocient. Určete, zda je daná řada konvergentní nebo divergentní. V případě konvergence určete součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{5}\right)^{-n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}}{5^n}x$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sqrt{x}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^{-n}$

Řešení:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

Pro první člen nekonečné geometrické řady dosadíme za $n=1$ a tedy:

$$a_1=\frac{1}{4}$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}=\frac{1}{4}$$

Aby daná nekonečná geometrická řada byla konvergentní a měla součet, musí platit:

$$|q|<1$$

Tato nerovnost je splněna a řada je tedy konvergentní. Pro součet platí:

$$\left|\frac{1}{4}\right|<1\Rightarrow s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{5}\right)^{-n}$

Pro první člen nekonečné geometrické řady dosadíme za $n=1$ a tedy:

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{-n}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-n+1}}=\left(\sqrt{5}\right)^{-n+n-1}=\left(\sqrt{5}\right)^{-1}$$

Aby daná nekonečná geometrická řada byla konvergentní a měla součet, musí platit:

$$|q|<1$$

Tato nerovnost je splněna a řada je tedy konvergentní. Pro součet platí:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|<1\Rightarrow s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}}{5^n}x$

Pro první člen nekonečné geometrické řady dosadíme za $n=1$ a tedy:

$$a_1=\frac{1}{5}x$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{25}x}{\frac{1}{5}x}=\frac{2\sqrt{2}}{25}x\frac{5}{x}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Aby daná nekonečná geometrická řada byla konvergentní a měla součet, musí platit:

$$|q|<1$$

Tato nerovnost je splněna, a řada je tedy konvergentní. Pro součet platí:

$$\left|\frac{2\sqrt{2}}{5}\right|<1\Rightarrow s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}x}{1-\frac{2\sqrt{2}}{5}}=\frac{\frac{1}{5}x}{\frac{5-2\sqrt{2}}{5}}=\frac{x}{5}\frac{5}{5-2\sqrt{2}}=\frac{x}{5-2\sqrt{2}}.$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sqrt{x}$

Pro první člen nekonečné geometrické řady dosadíme za $n=1$ a tedy:

$a_1=\frac{2}{3}\sqrt{x}$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\sqrt{x}}{\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{x}}=\frac{2}{3}$$

Aby daná nekonečná geometrická řada byla konvergentní a měla součet, musí platit:

$|q|<1$

Tato nerovnost je splněna a řada je tedy konvergentní. Pro součet platí:

$$\left|\frac{2}{3}\right|<1\Rightarrow s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{x}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{x}}{\frac{1}{3}}=3\frac{2}{3}\sqrt{x}=2\sqrt{x}.$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^{-n}$

Pro první člen nekonečné geometrické řady dosadíme za $n=1$ a tedy:

$a_1=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^{2}}}{\frac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}}=\frac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$$

Aby daná nekonečná geometrická řada byla konvergentní a měla součet, musí platit:

$|q|<1$

Tato nerovnost není splněna a řada je tedy divergentní a nemá součet.

4. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}\right)^{n}$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{3}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}+\frac{8}{3\sqrt{3}}+\dots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|<1$$

Tato nerovnost není splněna a řada tedy nemá součet.

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n=\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2\sqrt{2}}{125}+\dots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{\sqrt{2}}{5}}=\frac{2}{25}\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{2}{5\sqrt{2}}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{2}{5\sqrt{2}}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{5}}{1-\frac{2}{5\sqrt{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{5}}{\frac{5\sqrt{2}-2}{5\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{5}\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2}=\frac{2}{5\sqrt{2}-2}$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}\right)^n$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}\right)^n=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{5}+\frac{4}{5\sqrt{5}}+\dots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{5}}{\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}}=\frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{5}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{5}}{5}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{5}}{5}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}}{1-\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{5}}{5}}=\frac{\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}}{\frac{5-\sqrt[3]{4}\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}\frac{5}{5-\sqrt[3]{4}\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt[3]{4}}{5\sqrt{5}-5\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{4}}$$

5. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{7}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+2\pi)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^{n+1}}{3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e\sqrt{7}\right)^n}{7}$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{7}\right)^n$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{7}\right)^n=\frac{\pi}{7}+\frac{\pi^2}{49}+\frac{\pi^3}{343}+\dots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{\pi^2}{49}}{\frac{\pi}{7}}=\frac{\pi}{7}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1 \Rightarrow \left|\frac{\pi}{7}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{\pi}{7}}{1-\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{\pi}{7}}{\frac{6\pi}{7}}=\frac{\pi}{7}\frac{7}{6\pi}=\frac{1}{6}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}(1+2\pi)^n$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+2\pi)^n=(1+2\pi)+(1+2\pi)^2+(1+2\pi)^3+\ldots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{(1+2\pi)^2}{(1+2\pi)}=1+2\pi$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1 \Rightarrow |1+2\pi|<1$$

Tato nerovnost není splněna, a proto řada nemá součet.

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^{n+1}}{3^n}=-\frac{4}{3}-\frac{8}{9}-\frac{16}{27}-\ldots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{-\frac{8}{9}}{-\frac{4}{3}}=-\frac{8}{9}\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1 \Rightarrow \left|\frac{2}{3}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{-\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=-4$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e\sqrt{7}\right)^n}{7}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e\sqrt{7}\right)^n}{7^{n+1}}=\frac{e\sqrt{7}}{49}+\frac{e^2 7}{343}+\frac{e^3 7\sqrt{7}}{2401}+\ldots=\frac{e\sqrt{7}}{49}+\frac{e^2}{49}+\frac{e^3\sqrt{7}}{343}+\ldots$$

Pro kvocient této nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{e^2 7}{343}}{\frac{e\sqrt{7}}{49}}=\frac{e^2 7}{343}\frac{49}{e\sqrt{7}}=\frac{e}{\sqrt{7}}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{e}{\sqrt{7}}\right|<1$$

Tato nerovnost není splněna a nekonečná geometrická řada nemá součet.

6. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\log 3^{\frac{1}{2^{n-1}}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^x\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^x\right)^{-n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(5^{-x}\right)^n$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\log 3^{\frac{1}{2^{n-1}}}$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log 3^{\frac{1}{2^{n-1}}}=\log 3+\log 3^{\frac{1}{2}}+\log 3^{\frac{1}{4}}+\log 3^{\frac{1}{8}}+\ldots=\log 3+\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{4}\log 3+\frac{1}{8}\log 3+\ldots=$$

$$=\log 3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)$ platí:

$$q=\frac{1}{2}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{2}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Pro součet tedy platí:

$$s=2\log 3=\log 9$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^x\right)^n$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^x\right)^n=2^x+\left(2^x\right)^2+\left(2^x\right)^3+\ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(2^x\right)^2}{2^x}=2^x$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|2^x\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže:

$$2^x<2^0\Rightarrow x<0$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{2^x}{1-2^x}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^x\right)^{-n}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^x\right)^{-n}=\left(3^x\right)^{-1}+\left(3^x\right)^{-2}+\left(3^x\right)^{-3}+\ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(3^x\right)^{-2}}{\left(3^x\right)^{-1}}=\left(3^x\right)^{-1}=\frac{1}{3^x}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{3^x}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže:

$$\frac{1}{3^x}<\frac{1}{3^0}\Rightarrow 3^{-x}<3^0\Rightarrow -x<0\Rightarrow x>0$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\left(3^x\right)^{-1}}{1-\left(3^x\right)^{-1}}=\frac{\frac{1}{3^x}}{1-\frac{1}{3^x}}=\frac{\frac{1}{3^x}}{\frac{3^x-1}{3^x}}=\frac{1}{3^x-1}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(5^{-x}\right)^{n}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(5^{-x}\right)^{n}=\left(5^{-x}\right)^{1}+\left(5^{-x}\right)^{2}+\left(5^{-x}\right)^{3}+\ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(5^{-x}\right)^{2}}{\left(5^{-x}\right)^{1}}=\left(5^{-x}\right)^{1}=\frac{1}{5^x}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{5^x}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže:

$$\frac{1}{5^x} < \frac{1}{5^0} \Rightarrow 5^{-x} < 5^0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\left(5^{-x}\right)^1}{1-\left(5^{-x}\right)^1} = \frac{\frac{1}{5^x}}{1-\frac{1}{5^x}} = \frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{5^x-1}{5^x}} = \frac{1}{5^x-1}$$

7. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(7^{-x}\right)^{-n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{x}\right)^{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^{n}$

Řešení:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(7^{-x}\right)^{-n}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(7^{-x}\right)^{-n} = \left(7^{-x}\right)^{-1} + \left(7^{-x}\right)^{-2} + \left(7^{-x}\right)^{-3} + \dots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q = \frac{\left(7^{-x}\right)^{-2}}{\left(7^{-x}\right)^{-1}} = \left(7^{-x}\right)^{-1} = 7^x$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q| < 1 \Rightarrow \left|7^x\right| < 1$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže:

$$7^x < 7^0 \Rightarrow x < 0$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\left(7^{-x}\right)^{-1}}{1-\left(7^{-x}\right)^{-1}} = \frac{7^x}{1-7^x}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{x}\right)^{n}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{x}\right)^{n} = \frac{5}{x} + \frac{25}{x^2} + \frac{125}{x^3} + \dots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q = \frac{\frac{25}{x^2}}{\frac{5}{x}} = \frac{5}{x}$$

Aby měla tato nekonečná geometrická řada součet, musí platit:

$$|q|<1 \Rightarrow \left|\frac{5}{x}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže:

a) $x>0: \frac{5}{x}<1 \Rightarrow x>5$

b) $x<0: -\frac{5}{x}<1 \Rightarrow -x>5 \Rightarrow x<-5$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{5}{x}}{1-\frac{5}{x}}=\frac{\frac{5}{x}}{\frac{x-5}{x}}=\frac{5}{x-5}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n=\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x}+\frac{27}{x\sqrt{x}}+\dots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{3}{\sqrt{x}}$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže:

$$\frac{3}{\sqrt{x}}<1 \Rightarrow \sqrt{x}>3 \Rightarrow x>9$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{1-\frac{3}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}}=\frac{3}{\sqrt{x}-3}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^n=\frac{5}{\sqrt[3]{x}}+\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)^3+\dots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže:

$$\left|\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right|<1$$

a) $x > 0 : \frac{5}{\sqrt[3]{x}} < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} > 5 \Rightarrow x > 125$

b) $x < 0 : -\frac{5}{\sqrt[3]{x}} < 1 \Rightarrow -\sqrt[3]{x} > 5 \Rightarrow x < -125$

a nekonečná geometrická řada má tedy pro $-125 > x > 125$ součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{\sqrt[3]{x}}}{1-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}} = \frac{\frac{5}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{\sqrt[3]{x}-5}{\sqrt[3]{x}}} = \frac{5}{\sqrt[3]{x}-5}$$

8. Určete součet nekonečné geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)}{x^n}$.

Řešení:

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)}{x^n} = \frac{(1-x)}{x} + \frac{(1-x)}{x^2} + \frac{(1-x)}{x^3} + \dots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí, že $q = \frac{\frac{(1-x)}{x^2}}{\frac{(1-x)}{x}} = \frac{(1-x)}{x}$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže $\left|\frac{(1-x)}{x}\right| < 1$

Tuto nerovnost vyřešíme pomocí nulových bodů 1, 0:

	$(-\infty, 0)$	$(0,1\rangle$	$(1,\infty)$
$1-x$	+	+	-
x	-	+	+
	-	+	-

a) jestliže $x \in (0,1\rangle$

$$\frac{(1-x)}{x} < 1 \Rightarrow \frac{(1-x)}{x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{(1-x)-x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{1-2x}{x} < 0$$

Tuto nerovnost vyřešíme pomocí nulových bodů $\frac{1}{2}, 0$:

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$1-2x$	+	+	-
x	-	+	+
	-	+	-

$x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle$

b) jestliže $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

$-\frac{(1-x)}{x} < 1 \Rightarrow -\frac{(1-x)}{x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-1+x-x}{x} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} < 0$

$x \in (1, \infty)$

Pro $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty \right)$ je řada konvergentní a má součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{(1-x)}{x}}{1 - \frac{(1-x)}{x}} = \frac{\frac{(1-x)}{x}}{\frac{x-1+x}{x}} = \frac{\frac{(1-x)}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \frac{(1-x)}{x}\frac{x}{2x-1} = \frac{1-x}{2x-1}$$

9. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{(-1)^{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n-1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+x} \right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+x} \right)^{-n}$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{(-1)^{n-1}}$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{(-1)^{n-1}} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^2}{-1} + \frac{2x^3}{1} + \ldots = 2x - 2x^2 + 2x^3 - \ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q = \frac{-2x^2}{2x} = -x$$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$|-x| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1+x}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n-1}}$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n-1}} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \ldots = -1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\frac{1}{x}$$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$$\left|-\frac{1}{x}\right|<1\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=-\frac{x}{x+1}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+x}\right)^n$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+x}\right)^n=\sqrt{1+x}+\left(\sqrt{1+x}\right)^2+\left(\sqrt{1+x}\right)^3+\dots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}$$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$$\left|\sqrt{1+x}\right|<1\Rightarrow 1+x<1\Rightarrow x<0$$

$$\text{podm}:1+x\geq 0\Rightarrow x\geq -1$$

$$x\in\langle -1,0)$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{1+x}}$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+x}\right)^{-n}$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+x}\right)^{-n}=\left(\sqrt{1+x}\right)^{-1}+\left(\sqrt{1+x}\right)^{-2}+\left(\sqrt{1+x}\right)^{-3}+\dots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^{-2}}{\left(\sqrt{1+x}\right)^{-1}}=\left(\sqrt{1+x}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right|<1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1\Rightarrow 1<\sqrt{1+x}\Rightarrow 1<1+x\Rightarrow 0<x$$

$$\text{podm: }1+x>0\Rightarrow x>-1$$

$$x\in(0,\infty)$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$$

10. Určete součet nekonečné geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x\sqrt{x}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e^x\right)^n}{\left(-1\right)^{n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin x\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(\cos x\right)^n$

Řešení:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x\sqrt{x}\right)^n$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x\sqrt{x}\right)^n=x\sqrt{x}+x^2x+x^3x\sqrt{x}+\ldots=x\sqrt{x}+x^3+x^4\sqrt{x}+\ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=x\sqrt{x}$$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$$\left|x\sqrt{x}\right|<1$$

Podmínka pro druhou odmocninu nám vymezuje interval, ve kterém lze najít interval konvergence.

$$x\in\left\langle 0,\infty\right)$$

Lze tedy psát:

$$x\sqrt{x}<1\Rightarrow x<1\Rightarrow x\in\left\langle 0,1\right)$$

Pro $x\in\left\langle 0,1\right)$ je řada konvergentní a má součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e^x\right)^n}{\left(-1\right)^{n+1}}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e^x\right)^n}{\left(-1\right)^{n+1}}=\frac{e^x}{1}+\frac{e^{2x}}{-1}+\frac{e^{3x}}{1}+\ldots=e^x-e^{2x}+e^{3x}-\ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$$q=-e^x$$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$$\left|-e^{x}\right|<1 \Rightarrow e^{x}<1 \Rightarrow x \in(-\infty, 0)$$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_{1}}{1-q}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^{n}$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^{n}=\sin x+\sin ^{2} x+\sin ^{3} x+\ldots$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$q=\sin x$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$|\sin x|<1 \Rightarrow x \in R$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet

$$s=\frac{a_{1}}{1-q}=\frac{\sin x}{1-\sin x}$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\cos x)^{n}$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\cos x)^{n}=\cos x-\cos ^{2} x+\cos ^{3} x-\ldots:$$

Pro kvocient nekonečné geometrické řady platí:

$q=-\cos x$

Tato nekonečná geometrická řada má součet, jestliže:

$|-\cos x|<1 \Rightarrow x \in R$

a nekonečná geometrická řada má tedy součet:

$$s=\frac{a_{1}}{1-q}=\frac{\cos x}{1+\cos x}$$

11. Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n} x=250$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} x=250$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n} x=48$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n} x=12$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n} x=250$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n} x=2 x+4 x+8 x+\ldots=250$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$|q| < 1$

Tedy:

$$q = \frac{4x}{2x} = 2 \Rightarrow |2| < 1$$

Tato nerovnost neplatí, a tedy geometrická řada nemá součet. Nemá tedy smysl uvažovat o řešení rovnice.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x = 250$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x + \ldots = 250$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí

$|q| < 1$

Tedy:

$$q = \frac{\frac{1}{9}x}{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left|\frac{1}{3}\right| < 1$$

Tato nerovnost platí, a tedy geometrická řada má součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}x}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x\frac{3}{2} = \frac{1}{2}x$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{1}{2}x = 250$$

$$x = 500$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n x = 48$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n x = \frac{2}{5}x + \frac{4}{25}x + \frac{8}{125}x = 48$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$|q| < 1$

Tedy:

$$q = \frac{\frac{4}{25}x}{\frac{2}{5}x} = \frac{4x}{25}\frac{5}{2x} = \frac{2}{5} \Rightarrow \left|\frac{2}{5}\right| < 1$$

Tato nerovnost platí, a tedy geometrická řada má součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{5}x}{1-\frac{2}{5}}=\frac{\frac{2}{5}x}{\frac{3}{5}}=\frac{2x}{5}\frac{5}{3}=\frac{2}{5}x$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{2}{5}x=48$$

$$2x=240\Rightarrow x=120$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n x=12$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n x=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{49}x-\frac{1}{343}x+...=12$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

Tedy:

$$q=\frac{\frac{1}{49}x}{-\frac{1}{7}x}=-\frac{x}{49}\frac{7}{x}=-\frac{1}{7}\Rightarrow\left|-\frac{1}{7}\right|<1$$

Tato nerovnost platí, a tedy geometrická řada má součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{-\frac{1}{7}x}{1+\frac{1}{7}}=\frac{-\frac{1}{7}x}{\frac{8}{7}}=-\frac{x}{7}\frac{7}{8}=-\frac{1}{8}x$$

Řešíme tedy rovnici:

$$-\frac{1}{8}x=12$$

$$-x=96\Rightarrow x=-96$$

12. Řešte rovnici s neznámou $x\in R$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n x=\frac{5}{3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(0,1)^n x=\frac{1}{10}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-0,4)^n x=0,25$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n=1$

Řešení:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n x=\frac{5}{3}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n x=-3x+9x-27x+...=\frac{5}{3}$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

Tedy:

$$q = \frac{9x}{-3x} = -3 \Rightarrow |-3| < 1$$

Tato nerovnost neplatí, a tedy geometrická řada nemá součet. Nemá tedy smysl uvažovat o řešení rovnice.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0,1)^n x = \frac{1}{10}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0,1)^n x = 0,1x + 0,01x + 0,0001x + \ldots = \frac{1}{10}$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

Tedy:

$$q = \frac{0,01x}{0,1x} = 0,1 \Rightarrow |0,1| < 1$$

Tato nerovnost platí, a tedy geometrická řada má součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,1x}{1-0,1} = \frac{0,1x}{0,9} = \frac{1}{9}x$$

Řešíme tedy rovnici

$$\frac{1}{9}x = \frac{1}{10}$$

$$10x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{10}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-0,4)^n x = 0,25$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-0,4)^n x = -0,4x + 0,16x - 0,064x + \ldots = 0,25$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

Tedy:

$$q = \frac{0,16x}{-0,4x} = -0,4 \Rightarrow |-0,4| < 1$$

Tato nerovnost platí, a tedy geometrická řada má součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-0,4x}{1+0,4} = \frac{-0,4x}{1,4} = -\frac{2}{7}x$$

Řešíme tedy rovnici:

$$-\frac{2}{7}x = 0,25$$

$$-2x = 1,75 \Rightarrow x = -0,875 = -\frac{7}{8}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n = 1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n = 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = 1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

tedy:

$$q = \frac{4x^2}{2x} = 2x \Rightarrow |2x| < 1$$

Tato nerovnost je splněna pro $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1-2x}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{2x}{1-2x} = 1$$

$$2x = 1 - 2x$$

$$4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

13. Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n = \frac{1}{6}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3x}{4}\right)^n = 1$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{x^2}\right)^{2n} = 10$

Řešení:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n = \frac{1}{6}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n = \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{216} + \ldots = \frac{1}{6}$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

tedy:

$$q=\frac{\frac{x^2}{36}}{\frac{x}{6}}=\frac{x^2}{36}\frac{6}{x}\Rightarrow\left|\frac{x}{6}\right|<1$$

Tato nerovnost je splněna pro $x\in\left(-6,6\right)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{x}{6}}{1-\frac{x}{6}}=\frac{\frac{x}{6}}{\frac{6-x}{6}}=\frac{x}{6}\frac{6}{6-x}=\frac{x}{6-x}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{x}{6-x}=\frac{1}{6}$$

$$6x=6-x$$

$$7x=6\Rightarrow x=\frac{6}{7}$$

$$\frac{6}{7}\in\left(-6,6\right)\Rightarrow K=\left\{\frac{6}{7}\right\}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3x}{4}\right)^n=1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3x}{4}\right)^n=-\frac{3x}{4}+\frac{9x^2}{16}-\frac{27x^3}{64}+\ldots=1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=\frac{\frac{9x^2}{16}}{-\frac{3x}{4}}=-\frac{9x^2}{16}\frac{4}{3x}\Rightarrow\left|-\frac{3x}{4}\right|<1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

a) $x \geq 0 \Rightarrow \frac{3x}{4} < 1$

$3x < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{3}$

$[\ ]\, x \in \left\langle 0, \frac{4}{3} \right)$

b) $x < 0 \Rightarrow -\frac{3x}{4} < 1$

$-3x < 4 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$

$x \in \left(-\frac{4}{3}, 0 \right)$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{3x}{4}}{1+\frac{3x}{4}} = \frac{-\frac{3x}{4}}{\frac{4+3x}{4}} = -\frac{3x}{4}\frac{4}{4+3x} = -\frac{3x}{4+3x}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$-\frac{3x}{4+3x} = 1$$

$$-3x = 4 + 3x$$

$$-6x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right), K = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{x^2} \right)^{2n} = 10$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{x^2} \right)^{2n} = \frac{e^2}{x^4} + \frac{e^4}{x^8} + \frac{e^6}{x^{12}} + \ldots = 10$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$|q| < 1$

tedy:

$$q = \frac{\frac{e^4}{x^8}}{\frac{e^2}{x^4}} = \frac{e^4}{x^8}\frac{x^4}{e^2} = \frac{e^2}{x^4} \Rightarrow \left| \frac{e^2}{x^4} \right| < 1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

$$\frac{e^2}{x^4} < 1 \Rightarrow e^2 < x^4$$

$$|x| > \sqrt[4]{e^2} = \sqrt{e}$$

$$x \in \left(-\infty, -\sqrt{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}, \infty\right)$$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in \left(-\infty, -\sqrt{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}, \infty\right)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{e^2}{x^4}}{1-\frac{e^2}{x^4}} = \frac{\frac{e^2}{x^4}}{\frac{x^4-e^2}{x^4}} = \frac{e^2}{x^4}\frac{x^4}{x^4-e^2} = \frac{e^2}{x^4-e^2}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{e^2}{x^4-e^2} = 10$$

$$e^2 = 10x^4 - 10e^2$$

$$10x^4 = 11e^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{11}{10}e^2}$$

$$\pm\sqrt[4]{\frac{11}{10}e^2} \in \left(-\infty, -\sqrt{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}, \infty\right), K = \left\{\pm\sqrt[4]{\frac{11}{10}e^2}\right\}$$

14. Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^{-n} = 2$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n = 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos x)^n = 1$

Řešení:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = 1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \ldots = 1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

tedy:

$$q = (x-1) \Rightarrow |x-1| < 1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

a) $x \geq 1 \Rightarrow x-1<1$

$x<2$

$x \in \langle 1,2)$

b) $x<1 \Rightarrow -x+1<1$

$-x<0 \Rightarrow x>0$

$x \in (0,1)$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in (0,2)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x-1}{1-(x-1)}=\frac{x-1}{1-x+1}=\frac{x-1}{-x+2}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{x-1}{-x+2}=1$$

$$x-1=-x+2$$

$$2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \in (0,2), K=\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^{-n}=2$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^{-n}=(x+1)^{-1}+(x+1)^{-2}+(x+1)^{-3}+\ldots=2$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$|q|<1$

tedy:

$$q=(x-1)^{-1}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right|<1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

a) $x>1 \Rightarrow \dfrac{1}{x-1}<1$

$1<x-1 \Rightarrow x>2$

$x \in (2,\infty)$

b) $x<1 \Rightarrow -\dfrac{1}{x-1}<1$

$1<-x+1 \Rightarrow x<0$

$x \in (-\infty,0)$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{x-1}}{1-\left(\frac{1}{x-1}\right)}=\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x-1-1}{x-1}}=\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x-2}{x-1}}=\frac{1}{x-2}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{1}{x-2}=2$$

$$1=2x-4$$

$$2x=5\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2}\in(-\infty,0)\cup(2,\infty),K=\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n=1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin x)^n=\sin x+(\sin x)^2+(\sin x)^3+\dots=1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=\sin x\Rightarrow|\sin x|<1$$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x\in R$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\sin x}{1-\sin x}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{\sin x}{1-\sin x}=1$$

$$\sin x=1-\sin x$$

$$2\sin x=1\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi,x_2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

$$K=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos x)^n=1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos x)^n=\cos x+(\cos x)^2+(\cos x)^3+\dots=1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$|q| < 1$

tedy:

$q = \cos x \Rightarrow |\cos x| < 1$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in R$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\cos x}{1-\cos x}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{\cos x}{1-\cos x} = 1$$

$$\cos x = 1 - \cos x$$

$$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$K = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

15. Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan x)^n = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log x)^n = 1$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-e^x)^n = \frac{1}{10}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\ln x)^n = 10^{-3}$

Řešení:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tan x)^n = 1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tan x)^n = \tan x + (\tan x)^2 + (\tan x)^3 + \ldots = 1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$|q| < 1$

tedy:

$q = \tan x \Rightarrow |\tan x| < 1$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in (-45° + k180°, 45° + k180°)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\tan x}{1-\tan x}$$

Řešíme tedy rovnici

$$\frac{\tan x}{1-\tan x}=1$$

$$\tan x=1-\tan x$$

$$2\tan x=1\Rightarrow \tan x=\frac{1}{2}$$

$$x=26,6°+k180°$$

$$K=\{26,6°+k180°\}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}(\log x)^n=1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log x)^n=\log x+(\log x)^2+(\log x)^3+\ldots=1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=\log x\Rightarrow|\log x|<1$$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x\in(10^{-1},10)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\log x}{1-\log x}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{\log x}{1-\log x}=1$$

$$\log x=1-\log x$$

$$2\log x=1\Rightarrow \log x=\frac{1}{2}$$

$$x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\in(10^{-1},10)\Rightarrow K=\{\sqrt{2}\}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-e^x)^n=\frac{1}{10}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-e^x)^n=-e^x+(-e^x)^2+(-e^x)^3+\ldots=-\frac{1}{10}$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=\frac{(-e^x)^2}{-e^x}=-e^x\Rightarrow|-e^x|<1.$$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in (-\infty, 0)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-e^x}{1+e^x}.$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{10}$$

$$-10e^x = 1 + e^x$$

$$-11e^x = 1 \Rightarrow e^x = -\frac{1}{11}$$

$$K = \{\ \}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-\ln x)^n = 10^{-3}$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\ln x)^n = -\ln x + (-\ln x)^2 + (-\ln x)^3 + \ldots = 10^{-3}$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

tedy:

$$q = \frac{(-\ln x)^2}{-\ln x^x} = -\ln x \Rightarrow |-\ln x| < 1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

a) $-\ln x < 1 \Rightarrow \ln x > -1$

$$x > e^{-1}$$

b) $-\ln x > -1 \Rightarrow \ln x < 1$

$$x < e$$

$$x \in (e^{-1}, e)$$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in (e^{-1}, e)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\ln x}{1+\ln x}.$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{-\ln x}{1+\ln x}=10^{-3}$$
$$-\ln x=10^{-3}+10^{-3}\ln x$$
$$-\ln x-10^{-3}\ln x=10^{-3}$$
$$\ln x\left(-1-10^{-3}\right)=10^{-3}$$
$$\ln x=\frac{0,001}{-1,001}=-\frac{1}{1001}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{1001}}$$
$$e^{-\frac{1}{1001}}\in\left(e^{-1},e\right)\Rightarrow K=\left\{e^{-\frac{1}{1001}}\right\}$$

16. Řešte rovnici s neznámou $x\in R$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x+1}\right)^{n}=5$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)^{n}=1$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\sqrt{2}\right)^{n}=9$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^{n}=1$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x+1}\right)^{n}=5$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x+1}\right)^{n}=\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+1}\right)^{2}+\left(\sqrt{x+1}\right)^{3}+\ldots=5$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=\sqrt{x+1}\Rightarrow\left|\sqrt{x+1}\right|<1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

$$\left|\sqrt{x+1}\right|<1\Rightarrow\sqrt{x+1}<1$$
$$x+1<1\Rightarrow x<0$$

podm: $x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$

$$x\in\left\langle -1,0\right)$$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x\in\left\langle -1,0\right)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}.$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}=5$$

$$\sqrt{x+1}=5-5\sqrt{x+1}$$

$$6\sqrt{x+1}=5$$

$$\sqrt{x+1}=\frac{5}{6}\ /^2$$

$$x+1=\frac{25}{36}\Rightarrow x=-\frac{11}{36}$$

$$-\frac{11}{36}\in\left\langle -1,0\right)\Rightarrow K=\left\{-\frac{11}{36}\right\}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)^n=1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)^n=\left(\sqrt{x}+1\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}+1\right)^3+\ldots=1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=\sqrt{x}+1\Rightarrow\left|\sqrt{x}+1\right|<1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

$$\left|\sqrt{x}+1\right|<1\Rightarrow\sqrt{x}+1<1$$

$$\sqrt{x}<0\Rightarrow x<0$$

$$x\in\{\ \}$$

Podmínka pro konvergenci řady není splněna a řada tedy nemá součet.

c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\sqrt{2}\right)^n=9$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x-\sqrt{2}\right)^n=\left(x-\sqrt{2}\right)+\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(x-\sqrt{2}\right)^3+\ldots=9$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=x-\sqrt{2}\Rightarrow\left|x-\sqrt{2}\right|<1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

a) $x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x - \sqrt{2} < 1$

$x < 1 + \sqrt{2}$

$x \in \left\langle \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \right)$

b) $x < \sqrt{2} \Rightarrow -x + \sqrt{2} < 1$

$-x < 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x > \sqrt{2} - 1$

$x \in \left(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} \right)$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in \left(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1 \right)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x - \sqrt{2}}{1 - \left(x - \sqrt{2} \right)} = \frac{x - \sqrt{2}}{1 - x + \sqrt{2}}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{x - \sqrt{2}}{1 - x + \sqrt{2}} = 9$$

$$x - \sqrt{2} = 9 - 9x + 9\sqrt{2}$$

$$10x = 9 + 10\sqrt{2}$$

$$x = \frac{9 + 10\sqrt{2}}{10}$$

$$\frac{9 + 10\sqrt{2}}{10} \in \left(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1 \right) \Rightarrow K = \left\{ \frac{9 + 10\sqrt{2}}{10} \right\}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^n = 1$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^n = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^3 + \ldots = 1$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q| < 1$$

tedy:

$$q = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right| < 1$$

Zjistíme, pro která *x* je tato nerovnost splněna:

a) $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{3}{2} \Rightarrow x < \frac{9}{4}$$

$$x \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right)$$

b) $\sqrt{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{4}$

$$-\sqrt{x} + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow -\sqrt{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} > -\frac{1}{2}$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \left\langle 0, \frac{1}{4} \right)$$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in \left\langle 0, \frac{4}{9} \right)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{1 - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{1 - \sqrt{x} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \sqrt{x}}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \sqrt{x}} = 1$$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$1 \in \left\langle 0, \frac{4}{9} \right) \Rightarrow K = \{1\}$$

17. Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^x - 1 \right)^n = 2$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{x-1} \right)^n = 0,5$

Řešení:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^x - 1 \right)^n = 2$.

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{x}-1\right)^{n}=\left(e^{x}-1\right)+\left(e^{x}-1\right)^{2}+\left(e^{x}-1\right)^{3}+\ldots=2$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=e^{x}-1 \Rightarrow \left|e^{x}-1\right|<1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

a) $e^{x}-1<1 \Rightarrow e^{x}<2$

$x<\ln 2$

b) $e^{x}-1>-1 \Rightarrow e^{x}>0$

$x \in R$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in (-\infty, \ln 2)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s=\frac{a_{1}}{1-q}=\frac{e^{x}-1}{1-\left(e^{x}-1\right)}=\frac{e^{x}-1}{1-e^{x}+1}=\frac{e^{x}-1}{2-e^{x}}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{e^{x}-1}{2-e^{x}}=2$$

$$e^{x}-1=4-2e^{x}$$

$$3e^{x}=5 \Rightarrow e^{x}=\frac{5}{3}$$

$$x=\ln\frac{5}{3}$$

$$\ln\frac{5}{3} \in (-\infty, \ln 2) \Rightarrow K=\left\{\ln\frac{5}{3}\right\}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{x-1}\right)^{n}=0,5$$

Nejdříve si rozepíšeme sumu pomocí součtu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{x-1}\right)^{n}=e^{x-1}+\left(e^{x-1}\right)^{n}+\left(e^{x-1}\right)^{n}+\ldots=0,5$$

Abychom mohli sečíst pravou stranu rovnice (součet) musí mít tato geometrická řada kvocient, pro který platí:

$$|q|<1$$

tedy:

$$q=e^{x-1} \Rightarrow \left|e^{x-1}\right|<1$$

Zjistíme, pro která x je tato nerovnost splněna:

a) $e^{x-1}<1 \Rightarrow \ln e^{x-1}<\ln 1$

$x-1<0 \Rightarrow x<1$

b) $e^{x-1}>-1$

$x \in R$

Podmínka pro konvergenci řady je splněna pro $x \in (-\infty, 1)$. V tomto intervalu má nekonečná geometrická řada součet:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{e^{x-1}}{1-\left(e^{x-1}\right)} = \frac{e^{x-1}}{1-e^{x-1}}$$

Řešíme tedy rovnici:

$$\frac{e^{x-1}}{1-e^{x-1}} = 0,5$$

$$e^{x-1} = 0,5 - 0,5e^{x-1}$$

$$1,5e^{x-1} = 0,5 \Rightarrow e^{x-1} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$$

$$\ln e^{x-1} = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow x-1 = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{3} + 1$$

$$\ln\frac{1}{3} + 1 \in (-\infty, 1) \Rightarrow K = \left\{\ln\frac{1}{3} + 1\right\}$$